Table des matières

Avant-propos

Merci à tous ceux que j'ai côtoyé. Les professeurs, bien sûr, mais aussi les nombreux amateurs ou professionnels qui m'ont appris à mieux faire mon métier, à mieux communiquer et à mieux enseigner, sans oublier les élèves, éternelle source d'inspiration. Leurs idées, leurs remarques, leurs critiques, constructives ou acerbes, m'ont guidé au long de ces trente années de maturation.

Tétramath n'est pas un livre mais une méthode.

Pour l'expliquer, faisons un peu de philosophie.

Le vide est efficace, car comme le vide du soufflet peut produire du souffle à volonté, comme le moyeu d'une roue dont le vide permet de la faire tourner, comme le vase ou la maison, il est réceptacle.

Le cahier. Voilà le point central de cette méthode. Un bon cahier à spirale quadrillé.

Autour de ce cahier gravite ce cours, des exercices à correction dynamique sur le net et même l'utilisation du smartphone.

Tout ceci permet un apprentissage en présentiel, à distance, ou les deux.

Je te souhaite la réussite et le succès.

Une série de ressources gratuites ou libres de droit ont été utilisées.

Les logiciels livetex, lyx et luatex pour la rédaction, openboard, geogebra, google sheet, gimp, libreoffice, framindmap pour la conception des données. Tous sont des marques déposées de leurs propriétaires. Des ressources de https ://www.maths-et-tiques.fr/ ont également été utilisées.

De nombreuses illustrations sont issues de freepik.com. Leurs auteurs sont brgfx, pikisuperstar, iconicbestiary, rawpixel, fwstudio, katemangostar, kjpargeter, asier_relampagoestudio, macrovector. Qu'ils soient tous remerciés !

TétraMath, la méthode

Les 5 sens

Nous apprenons avec nos 5 sens : vue, toucher, goût, odorat et ouïe. L'idéal serait de les utiliser tous pour chacun de nos apprentissages. Dans le cadre de ce cours, nous allons utiliser la vue, l'ouïe et le toucher. Inutile d'expliquer la vue. L'odorat et le goût ne seront malheureusement pas utilisés ici.

L'ouïe

Tu as certainement un bon professeur de mathématiques. Écoute-le attentivement !
Il sera sans doute possible de lire ce texte écrit (text-to-speech) au départ de sa version électronique. Ces outils ne lisent pas encore bien les formules mathématiques.

Le toucher

Voici un sens très important. En utilisant à la fois la vue, l'ouïe et le toucher, nous facilitons notre mémoire. Pour utiliser le toucher, rien de plus facile.

Procure-toi un cahier à spirale quadrillé, de format A4 environ.

Pourquoi un cahier ? Parce que les feuilles sont reliées entre-elles. Le 2 juin, tu retrouveras facilement le cours du 17 février.

Pourquoi à spirale ? Parce qu'il est possible de retourner la page de gauche (ou de droite) sous les autres et le cahier occupe deux fois moins de place.

Si tu es droitier, écris uniquement sur les pages de droite pendant le cours ; tu écriras sur les pages de gauche en dehors du cours : préparations, synthèses, ... Les gauchers ont déjà compris qu'ils feront l'inverse. Des exemples de synthèse se trouvent en annexe.

Une petite histoire.
Pythagore (vers -540) a peut-être écrit le théorème qui porte son nom. Ce n'est pas du tout certain, car des cas particuliers de ce théorème étaient connus 1000 ans auparavant et, de plus, nous n'avons aucun écrit de Pythagore ! Bref, imaginer Pythagore écrire « son » théorème de gauche à droite et de haut en bas est une pure fiction !

Écris sur la page de droite comme tu veux : fais des ratures, barre, reviens en arrière (pas de 1000 ans) et surtout n'efface rien ! Laisse les erreurs sous les ratures pour ne plus les refaire. Tu veux un cours propre ? Utilise les pages de gauche... Utilise un stylo à 4 couleurs, un crayon et une gomme (rarement). Une règle et un compas pour reporter les mesures. Pour la calculette, demande à ton professeur. Je ne peux pas tout faire ! Je fais ce que je peux, et tu fais le reste !

PLR

La mise en page et la police ont été choisies pour faciliter l'accès aux personnes à lecture réduite.

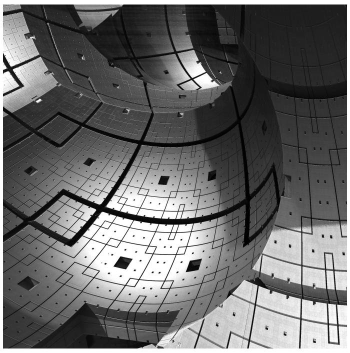
Contenu

TétraMath est divisé en 6 chapitres.

Statistique

Géométrie analytique plane

Géométrie dans l'espace



Trigonométrie

Deuxième degré

Fonctions

Les mentions C1, C2 et C3 signifient :

- **C1 Expliciter les savoirs et les procédures**

Tu seras capable de citer un énoncé, d'expliciter un concept, de rédiger une démonstration de manière claire et précise et aussi maîtriser le vocabulaire, les tournures et le symbolisme nécessaires pour expliquer une propriété.

- **C2 Appliquer une procédure**

Tu devras acquérir des réflexes « réfléchis » pour résoudre un exercice. Il s'agit d'exercices rituels.

- **C3 Transférer**

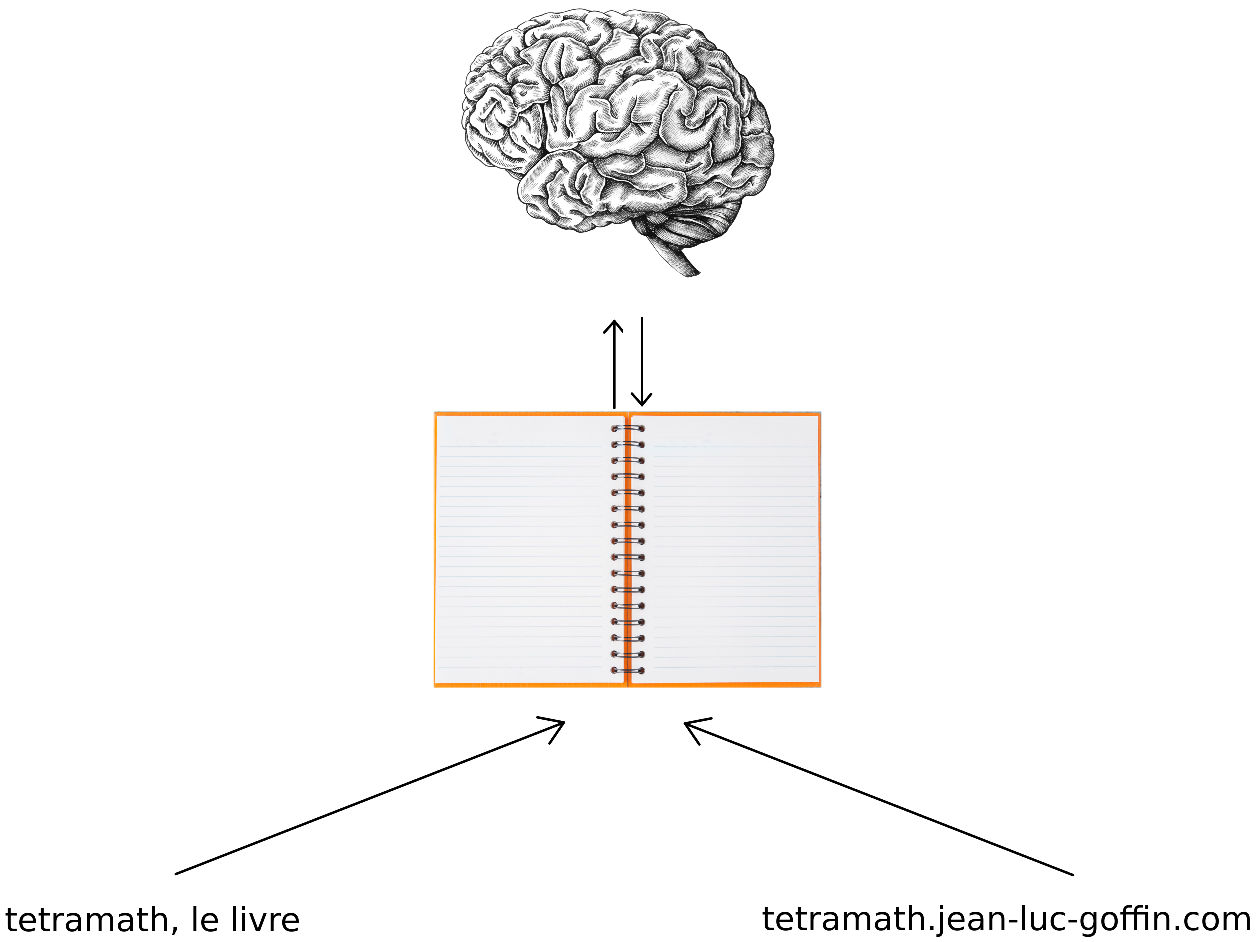
Le but est de résoudre un problème en choisissant une bonne stratégie.

Support numérique

Tétramath est conçu pour les élèves 2.0 : Le cours comprend aussi des fichiers en ligne. Ceux-ci sont indiqués par une pastille verte :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com

Une adresse donnant accès direct à chaque chapitre sera donnée au début de celui-ci.


tetramath, le livre
tetramath.jean-luc-goffin.com

partie I

Comprendre

Chapitre 1

Trigonométrie

Table des matières

Objectifs

CONNAÎTRE

- Représenter sur le cercle trigonométrique un point correspondant à un angle ainsi que ses nombres trigonométriques.
- Interpréter géométriquement les relations principales.

APPLIQUER

- Calculer l'amplitude d'un angle avec calculatrice.
- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle avec calculatrice.
- Calculer l'aire d'un triangle avec calculatrice.

TRANSFÉRER

- Utiliser les relations trigonométriques pour traiter une application géométrique, topographique, physique, ...
- Calculer une distance inaccessible dans le plan ou dans l'espace.

En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'un rapporteur (parfois tracé dans une équerre) et d'une calculette scientifique.

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/trigonometrie

1.0 Prérequis

1. Isole C2

   (a) R dans $U = R.I$

   (b) v dans $d = v.t$

   (c) r dans $S = \pi.r^2$

   (d) r dans $V = \pi.r^2.h$

   (e) y dans $t = \dfrac{x}{y}$

   (f) x dans $3x - 4y = 5$

   (g) y dans $x + 2y = 5$

   (h) y dans $3x + 4y = 5$

   (i) d dans $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcd$

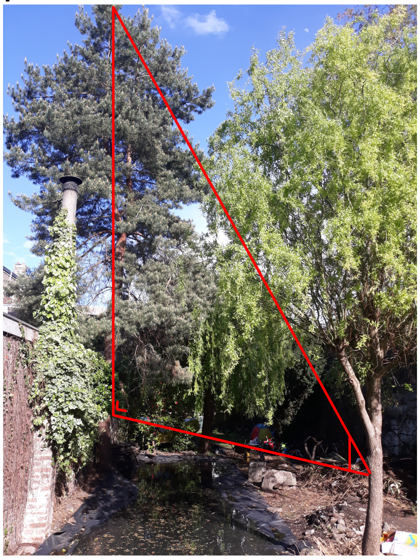
2. Soit le triangle ABC rectangle en B. C2
   Première série : un angle aigu et un côté sont donnés.
   Complète le tableau.

a	b	c	$\widehat{A}$	$\widehat{C}$
17 cm				36°
	13 cm		47°	
17 cm			17°	

3. Soit le triangle ABC rectangle en B. C2
   Deuxième série : deux côtés sont donnés.
   Complète le tableau.

a	b	c	$\widehat{A}$	$\widehat{C}$
3 cm		4 cm		
17 cm	20 cm			
	13 cm	10 cm		

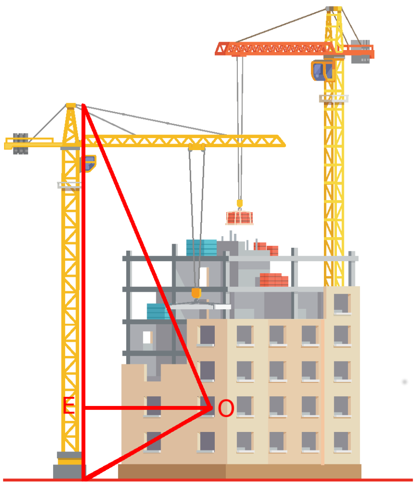
4. Un bûcheron mesure la hauteur d'un arbre C3
à l'aide d'un triangle rectangle dont un angle aigu mesure 30°.
Il place cet angle à son œil, le côté adjacent horizontal,
et doit reculer à 32 mètres du pied de l'arbre
pour viser la cime de l'arbre avec l'hypoténuse.



   (a) Quelle est la hauteur de l'arbre sachant que l'œil du bûcheron est à 1,5 mètre de haut ?

   (b) Il n'est pas possible de reculer de 32 mètres. Aussi notre bûcheron place l'autre angle aigu à son œil, de la même façon.
   De combien de mètres doit-il reculer pour viser la cime de cet arbre ?

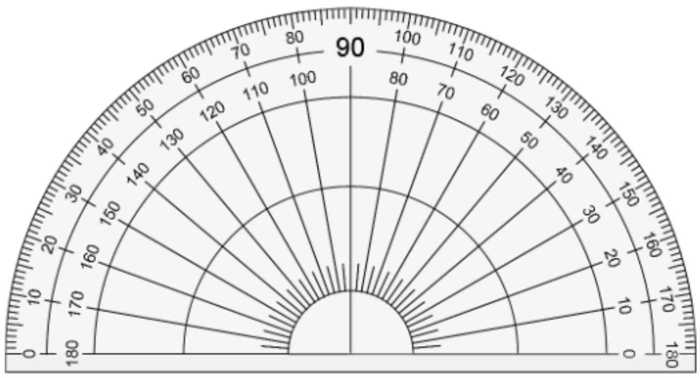
5. D'une fenêtre, l'œil d'un observateur situé à 9 mètres au-dessus du sol vise le pied et le sommet d'une grue de chantier. C3



Le pied de la grue est situé à 13° en-dessous de l'horizontale,
alors que son sommet se situe 58° au-dessus.
Quelle est la hauteur de la grue ?

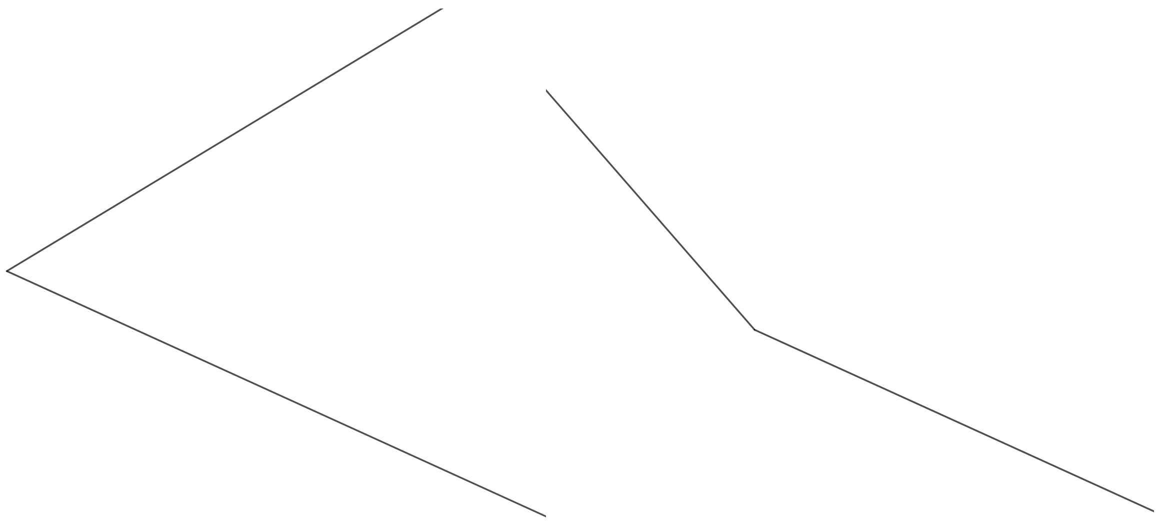
1.1 Angles dans le cercle trigonométrique

Incursion



Cet outil permet de mesurer des angles.

Mesure les angles ci-dessous.



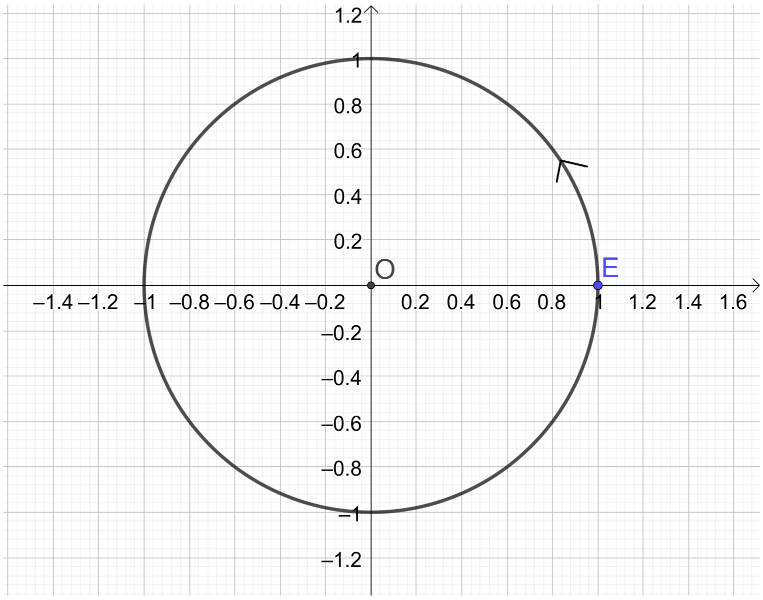
http ://geogebra.org/classic/Fyet2ZpK

Le cercle trigonométrique

Il existe des rapporteurs de toutes sortes : des petits, des grands, des mous...
Mettons un peu d'ordre dans tout cela. Nous voulons un **rapporteur universel.**
Tout d'abord, ce sera un cercle complet, pas seulement un demi-cercle.
Ensuite, il devra être simple : centre $(0;0)$ et rayon 1.

Enfin, il faudra mesurer d'une seule façon. La plupart des rapporteur ont deux origines (tu peux vérifier !).

Une seule origine $(1;0)$ et comme c'est une cercle complet on précise le sens positif.

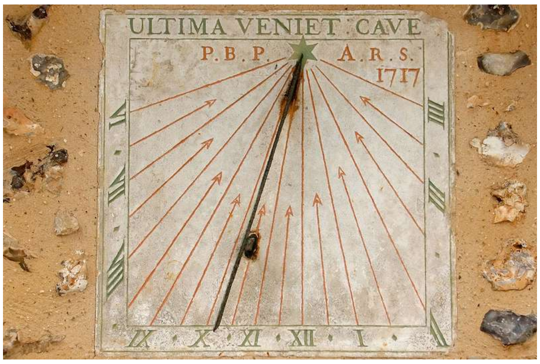


Il manque quelque chose sur ce rapporteur : les degrés !

Je parie que ton rapporteur est transparent. Le problème est réglé !

Attention ! Le 0° du rapporteur doit se trouver au point E.

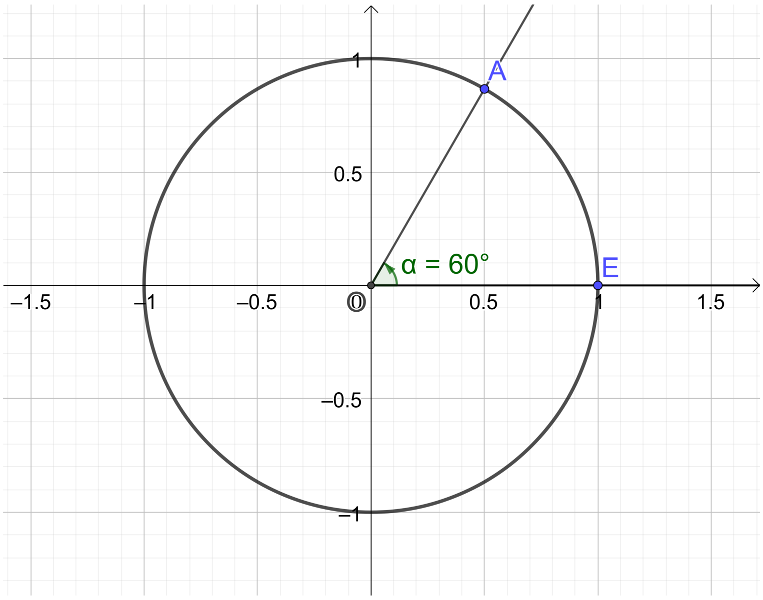
Une petite question.
Le sens du cercle trigonométrique est celui des cadrans solaires. Tu le retrouves sur ce cadran solaire du $18^{ème}$ siècle. Alors, pourquoi les horloges tournent-elles dans l'autre sens ? Mystère...



Mesures d'un angle orienté dans le cercle trigonométrique

Un angle orienté possède un côté origine et un côté extrémité.

Pour mesurer un angle orienté dans le cercle trigonométrique, il suffit de représenter son côté origine sur la demi-droite $[OE$ et le côté extrémité indique la mesure.



Vérifie avec ton rapporteur que l'angle $\widehat{EOA}$ mesure 60°.
Le point A représente l'angle α sur le cercle trigonométrique.

Rien ne t'oblige à marcher sur la flèche ! Tant que tu pars de $[OE$ et que tu arrives sur $[OA$, c'est le même angle.
Ainsi, en tournant dans l'autre sens, tu obtiens -300°. C'est **une** autre mesure du **même** angle.
Cherches-en 3 autres mesures.

Exercices

1. Pour chacune des mesures d'angle suivantes
   1) indique le point sur le cercle trigonométrique
   2) détermine 2 mesures positives et 2 négatives de cet angle.

   (a) $-12°$

   (b) $150°$

   (c) $-135°$

   (d) $320°$

   (e) $210°$

2. Donne la mesure équivalente appartenant à l'intervalle $[0°; 360°[$.

   (a) $1230°$

(b) $-510°$

(c) $720°$

(d) $1700°$

(e) $-910°$

Mesures d'un angle non orienté dans le cercle trigonométrique

Les angles d'un triangle ou d'un polygone ne sont généralement pas orientés.

Pour les représenter sur le cercle trigonométrique, il suffit de considérer que leur mesure est comprise entre 0° et 360° (angles orientés positivement).

1.2 sin, cos, tan d'un angle quelconque

Incursion

Le cercle trigonométrique permet de représenter un angle (orienté) par un point.

C'est génial ! Essaye de mettre deux demi-droites de même origine dans ta poche...

Alors qu'un point, c'est l'objet le plus simple de la géométrie.

Examinons ce point d'un peu plus près.

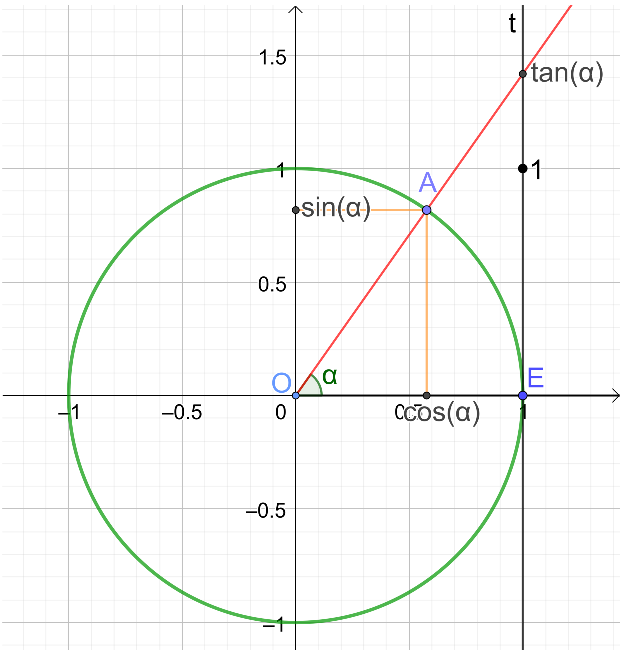
Grâce à notre repère ce point a deux coordonnées, abscisse (sur l'axe horizontal) et ordonnée (sur l'axe vertical).

C'est $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

C'est tout ? C'est tout !

Si A est l'unique point du cercle trigonométrique déterminé par l'angle orienté d'amplitude α, alors

- le sinus de α ($\sin\alpha$) est l'ordonnée du point A
- le cosinus de α ($\cos\alpha$) est l'abscisse du point A



Ajoutons à côté du cercle trigonométrique l'axe t, parallèle à l'axe vertical, passant par $(1, 0)$ et avec les mêmes graduations.

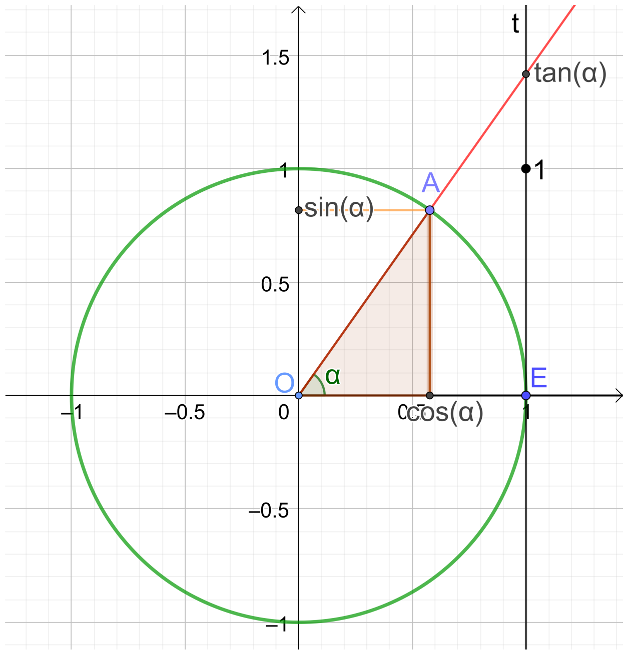
• la tangente de α ($\tan\alpha$) est la graduation sur l'axe des tangentes du point d'intersection avec la droite OA.

On a déjà vu une définition du sinus.
Y a-t-il deux sinus ?

Il n'y a qu'un seul sinus. L'ancien sinus ne s'applique qu'aux triangles rectangles et plus précisément aux angles aigus dans un triangle rectangle.

Le nouveau sinus s'applique à tous les angles.

Bien entendu, pour les angles aigus, c'est le même sinus. Voici pourquoi.



Dans le triangle rose, la vieille définition nous dit : $\sin\alpha = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}}$.

Or l'hypoténuse est un rayon du cercle trigonométrique et vaut donc 1.

Quant au côté opposé, nous pouvons le mesurer sur l'axe vertical.

Il y est compris entre la graduation $\sin\alpha$ de la nouvelle définition et 0.

C'est la distance à l'origine de $\sin\alpha$ et donc $|\sin\alpha|$.

Nous avons ainsi démontré que $\sin\alpha = \dfrac{|\sin\alpha|}{1}$ ou encore

$\sin\alpha = |\sin\alpha|$

où le sin de gauche est le vieux sin et le sin de droite est le nouveau sin.

En regardant l'axe vertical, tu vois que pour un angle aigu, $\sin\alpha > 0$ et donc

$\sin\alpha = \sin\alpha$

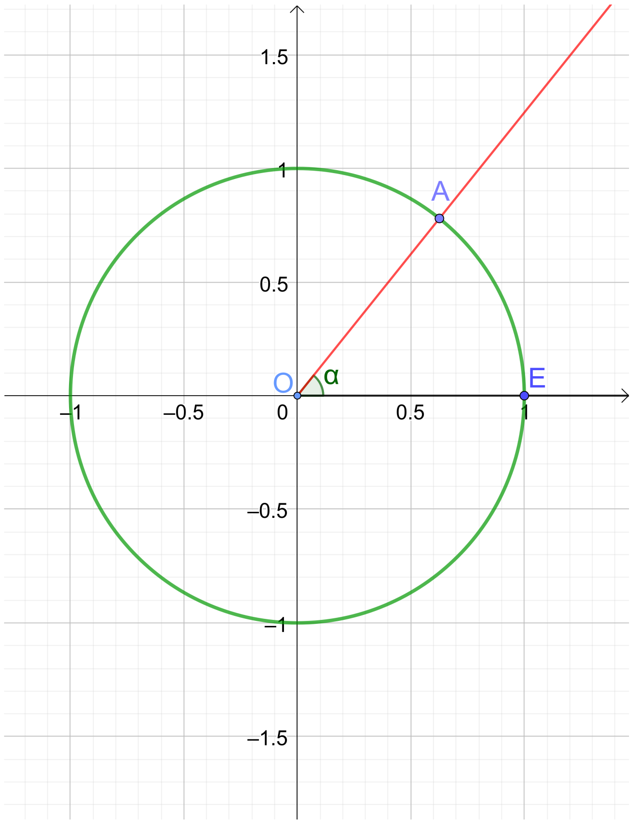
où le sin de gauche est le vieux sin et le sin de droite est le nouveau sin.

Le raisonnement est le même pour $\cos\alpha$.

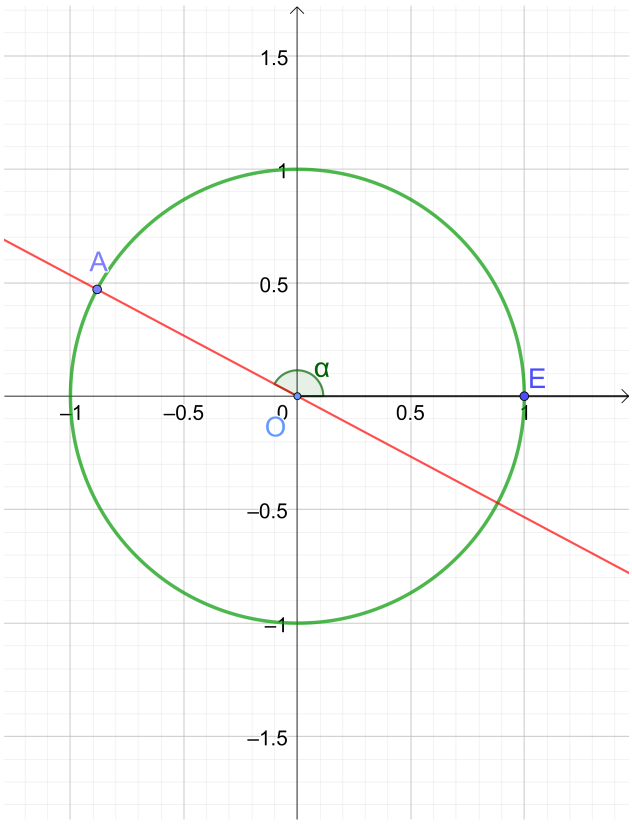
Pour $\tan\alpha$, les amateurs de triangles semblables y arriveront.

Exercices

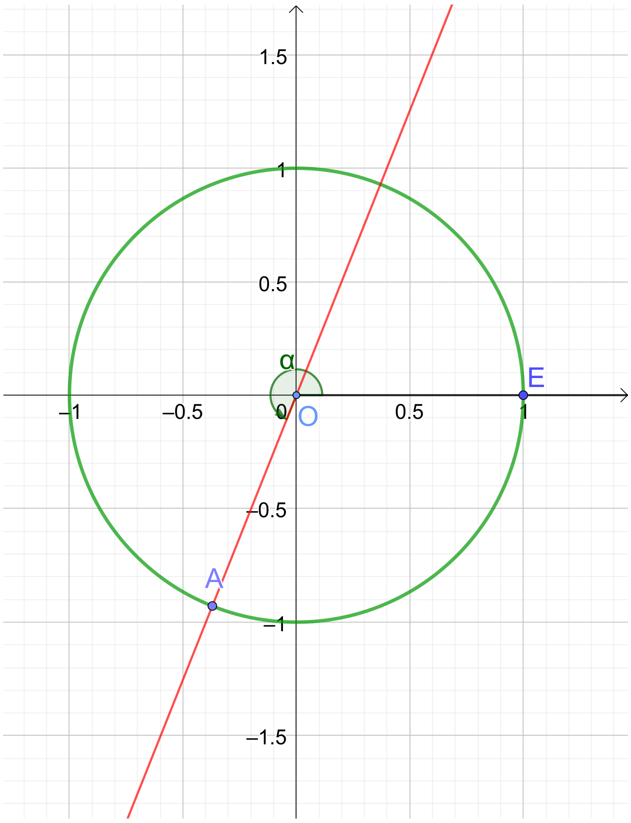
1. Représente le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle α dans les 4 situations suivantes puis donnes-en une valeur approximative.



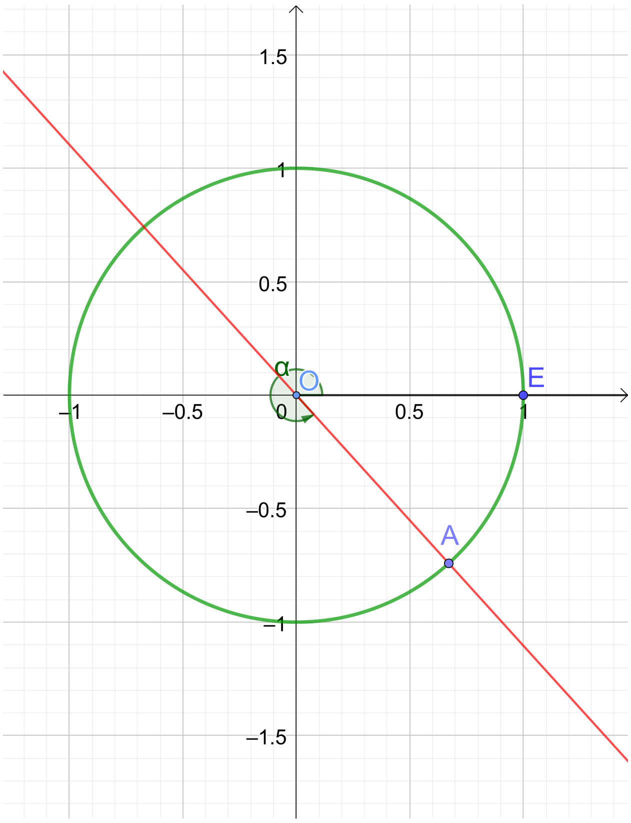
(a)



(b)



(c)



(d)

2. http ://www.macformath.net/math/geogebra/html/cercletrigo.html

1

Valeurs remarquables

En se basant sur le cercle trigonométrique, complète les nombres trigonométriques suivants :

	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$
sin				
cos				
tan				

Que constates-tu à la dernière ligne ?

$\tan 90°$ et $\tan 270°$ (ou $\tan(-90°)$) n'existent pas !

En effet, la droite OA est parallèle à l'axe des tangentes.

1.3 Formule fondamentale et formule de *tan*

Et la formule fondamentale $\sin^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A} = 1$?

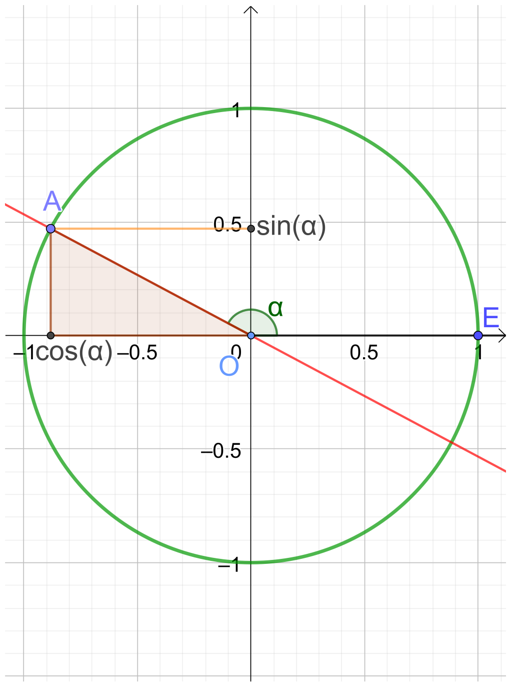
Formule fondamentale de la trigonométrie

Quel que soit l'angle orienté dont une mesure est α,

$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$

La démonstration a été faite l'année passée pour les angles aigus.

Faisons-la pour un angle obtus quelconque.



Dans le triangle rectangle rose,

nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore.

L'hypoténuse est un rayon du cercle trigonométrique et mesure donc

Le côté horizontal de l'angle droit mesure

Le côté vertical de l'angle droit mesure

Par le théorème de Pythagore, $^2 = \quad ^2 + \quad ^2$ et donc

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

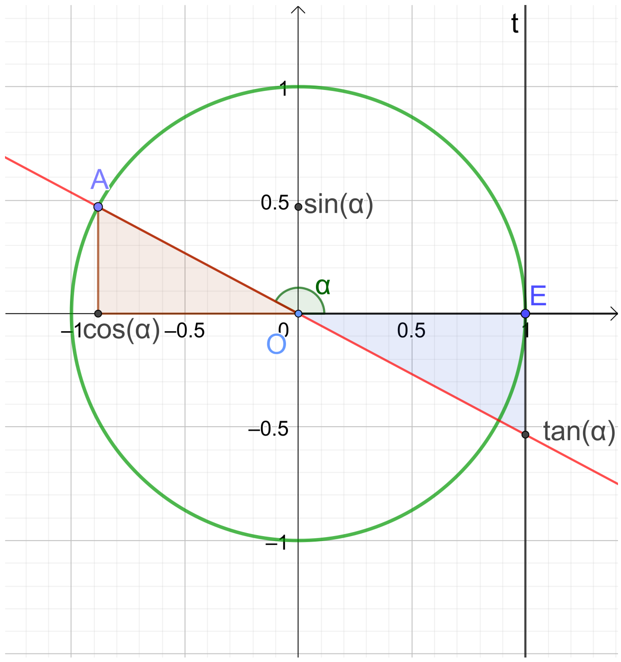
Virons l'axe des tangentes !

Il est parfaitement possible de ne plus utiliser l'axe des tangentes grâce à la formule $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

où α est une mesure d'un angle quelconque non droit.

(Pourquoi pas droit ?)

Démontrons-la pour un angle obtus.



Le triangle bleu et le triangle rose sont semblables car

Donc le rapport $\frac{\text{côté vertical}}{\text{côté horizontal}}$ de l'un est égal au rapport de l'autre.

$$\frac{|\tan\alpha|}{1} = \frac{|\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}$$

$$|\tan\alpha| = \frac{|\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}$$

Pour enlever les valeurs absolues, observe le signe de

$\tan\alpha$

$\sin\alpha$

$\cos\alpha$

On a donc bien $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

Exercice

Pour chaque mesure,

1. représente l'angle orienté sur le cercle trigonométrique,
2. donne une approximation des nombres trigonométriques de cet angle (sin, cos, tan),
3. vérifie que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
4. vérifie que $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

5. vérifie ensuite $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$ à l'aide de ta calculette.

   (a) $\alpha = 110°$

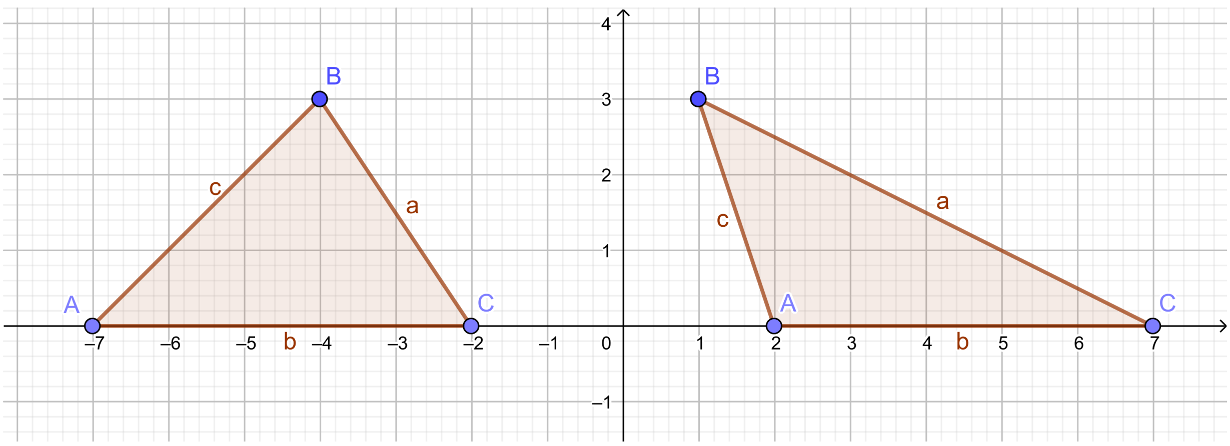
   (b) $\alpha = 246,12°$

   (c) $\alpha = 49°$

   (d) $\alpha = 131°$

1.4 Aire d'un triangle quelconque

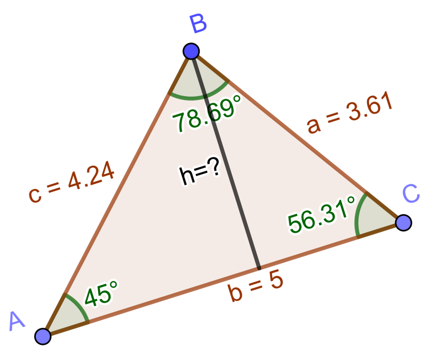
Incursion



L'aire de chacun de ces triangles est de 7,5 cm² (unité de longueur : 1 cm).
Pourquoi ?

$$S = \frac{Base.Hauteur}{2}$$

Et si le triangle est donné comme ceci ?



Pour trouver la hauteur,

1

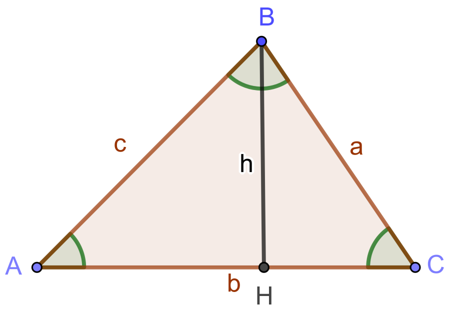
il suffit d'utiliser le triangle rectangle de sommet A.

$\sin 45° = \overline{}$ $\qquad h =$

$S = \dfrac{Base.Hauteur}{2} = \dfrac{5.}{2}$

Et tu retrouves 7,5 cm² (7,4953 avec les erreurs d'arrondi).

Aire d'un triangle



Je cache les mesures et nous reprenons le raisonnement.

$\sin \widehat{A} = \dfrac{h}{c} \qquad h = c.\sin \widehat{A}$

$$S = \frac{b.c.\sin \widehat{A}}{2}$$

En utilisant n'importe quel côté comme base, cela donne

$$S = \frac{a.b.\sin \widehat{C}}{2} = \frac{a.c.\sin \widehat{B}}{2} = \frac{b.c.\sin \widehat{A}}{2}$$

Exercices

Calcule l'aire du triangle ABC dont on donne

1. $a = 2$, $b = 3$, $\widehat{C} = 30°$
2. $a = 3,61$, $c = 4,24$, $\widehat{B} = 79,69°$
3. $b = 2,18$, $c = 9,23$, $\widehat{A} = 49°$
4. $a = 2$, $b = 3$, $\widehat{C} = 149°$

1.5 Formules des triangles quelconques

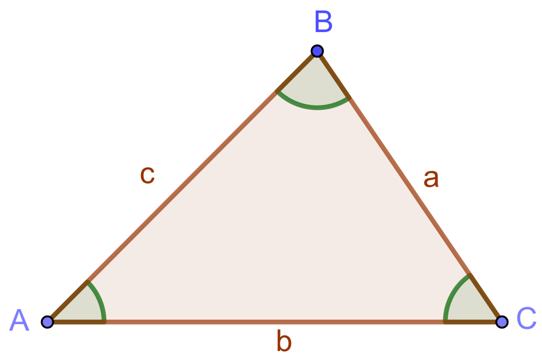
Dans un triangle quelconque, il n'y a pas d'hypoténuse.
Nous allons donc dire adieu à la formule de Pythagore,
mais d'abord à SOH - CAH - TOA.

Loi des sinus

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$$

Loi du cosinus (théorème de Pythagore généralisé)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos \widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c. \cos \widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b. \cos \widehat{C}$$



Mais aussi

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$$

Exercice

Résoudre un triangle, c'est déterminer les éléments manquants d'un triangle (côtés et angles) C2 (C3 si *)

Résous les triangles suivants et détermine leur aire.

(précision : 4 décimales pour les angles, 2 pour les longueurs et l'aire)

Il y a trois types de formules.

• Celles qui contiennent un angle : règles du cos.

• Celles qui contiennent deux angles : règles des sin.

• Celles qui contiennent trois angles : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$.

Regarde bien les données et choisis une formule qui ne contient qu'une inconnue !

	a	b	c	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
1.	10				$30°$	$45°$
2.		10	20	$60°$		
3.	10	20	15			
4.	13	2	5			
5.	25	13				$40°$
6.		100		$71°$		$26,25°$
7.*	20	30		$30°$		
8.*	25	70			$15,17°$	
9.*	$5,31$		$3,95$			$47,35°$
10.	70	82				$30°$
11.	42	100	108			
12.*	98	364			$30°$	

1.6 Applications des triangles quelconques

Tous les exercices qui suivent sont de la catégorie C3.

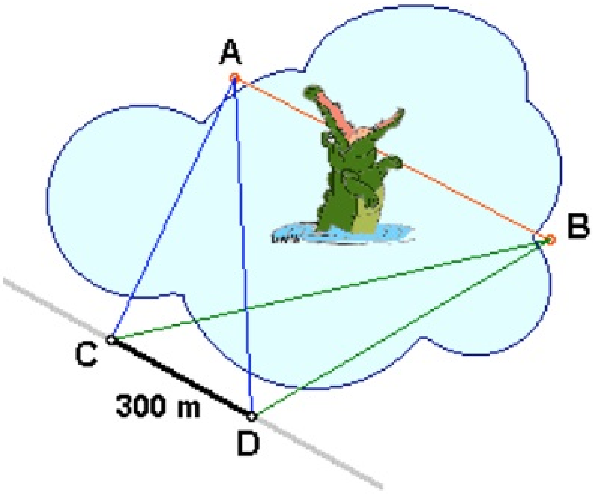
« Rater » un problème, ça peut arriver à tout le monde.
Obtenir un 0/10 dans un problème, ça ne peut pas t'arriver !
Pourquoi ?
Parce qu'il est toujours possible, au début d'un problème, de faire un petit tableau avec des essais ou de faire un dessin avec quelques annotations.
En trigonométrie, tu feras plutôt un dessin.

1. Le Mont Saint-Michel est situé au sommet d'une colline, dans la baie du même nom. Diverses mesures ont été effectuées.
   $\widehat{A} = 26°$ $\widehat{B} = 30°$ Les points A et B sont séparés de 50 mètres.
   Quelle est la hauteur du Mont Saint-Michel (précision : 1 décimètre) ?

   Suggestion : calcule les autres angles.

2. L'armée S occupe les positions C et D face à l'armée N qui occupe les positions A et B.
   Les deux armées sont séparées par une zone démilitarisée infestée d'alligators.
   Les responsables de l'armée S ont séparés leurs positions C et D de 300 m et aimeraient connaître la distance qui sépare les positions A et B de l'armée adverse.
   Pour cela, ils mesurent les angles suivants : $A\hat{D}C = 42°$, $A\hat{D}B = 65°$, $A\hat{C}B = 67°$ et $B\hat{C}D = 51°$.
   Quelle distance sépare les positions A et B (à 10 cm près) ?

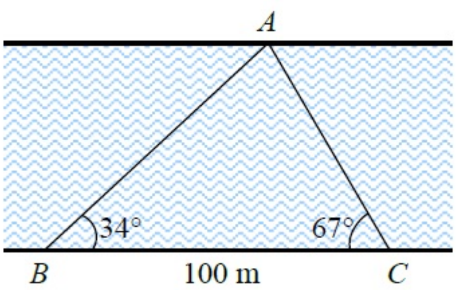


Suggestion : Recopie la figure avec les éléments utiles.

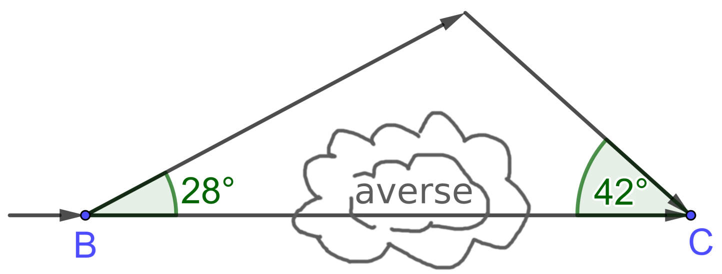
Dans le dessin, on vire les alligators et les armées ; on y écrit
toutes les données numériques (nombres) de l'énoncé
et on y ajoute l'un ou l'autre angle.

3. Depuis le parc Mini-Europe, au point A, je vois l'Atomium sous un angle (avec l'horizontale) de 22°. J'avance de 50 mètres pour arriver au point B, d'où je vois l'Atomium sous un angle (avec l'horizontale) de 27°. Sachant que mon œil se trouve à 1m50 du sol, quelle est la hauteur de l'Atomium (au centimètre près) ? Fais un schéma.

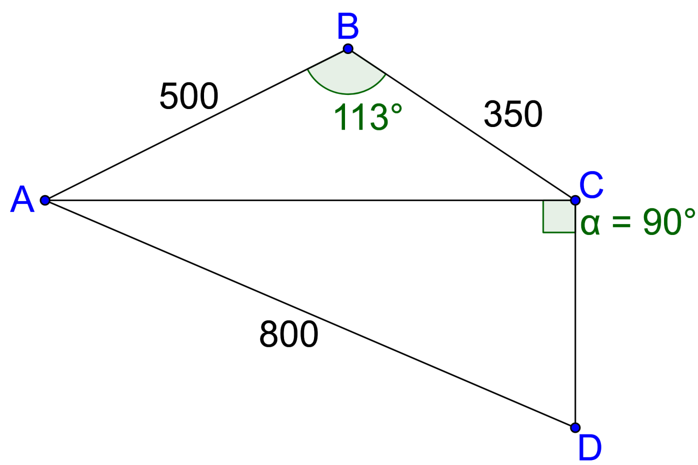
4. Un promeneur souhaite traverser la rivière pour se rendre au point A. De deux points B et C distants de 100 m et situés sur la berge sur laquelle il se trouve, il fixe le point A sur l'autre berge et mesure les angles représentés ci-dessous.
   Quelle est la largeur de la rivière (précision : 1 décimètre) ?



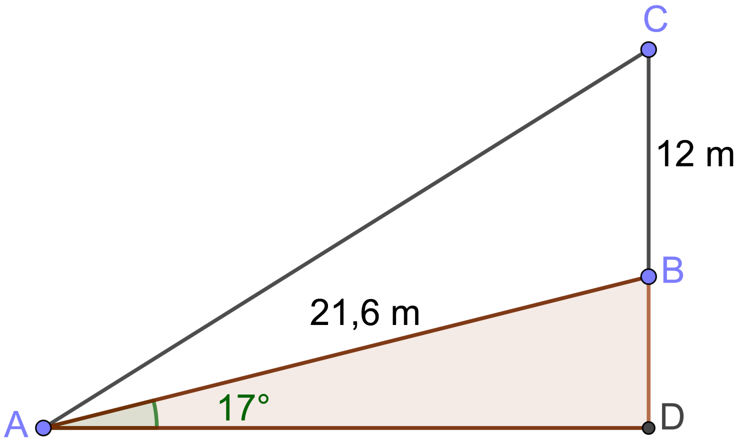
5. Tu es un pilote d'avion averti. Ta compagnie te demande de contourner une averse orageuse.
   Pour ce faire, la direction que tu prends fait un angle de 28° avec la direction normale. Tu décides, quand il n'y a plus de danger, de reprendre ta direction initiale. Tu interceptes alors ta trajectoire sous un angle de 42°, 60 km après l'avoir quittée (distance entre les points B et C).
   Quelle distance supplémentaire as-tu parcourue (à 100 m près) ?



6. Le polygone $ABCD$ est déformé.
   Calcule les éléments manquants de ce polygone.
   Suggestion : cherche la longueur $|AC|$. (Précision : 2 décimales).



7. Un poteau haut de 12 m est placé sur le flanc d'une colline qui forme un angle de $17°$ avec l'horizontale.
   Calcule la longueur minimale d'un câble tendu entre le sommet du poteau et un point en contrebas distant de 21,6 m de la base du poteau, au décimètre près.



A la fin de ce chapitre, tu es capable de

CONNAÎTRE

• Représenter sur un cercle trigonométrique un point correspondant à un angle ainsi que ses nombres trigonométriques.

• Établir le lien entre triangles semblables et nombres trigonométriques.

• Interpréter géométriquement les relations principales.

APPLIQUER

• Calculer l'amplitude d'un angle avec calculatrice.

• Calculer la longueur d'un côté d'un triangle avec calculatrice.

• Calculer l'aire d'un triangle avec calculatrice.

TRANSFÉRER

• Utiliser les relations trigonométriques pour traiter une application géométrique, topographique, physique, ...

• Calculer une distance inaccessible dans le plan ou dans l'espace.

Chapitre 2

Fonctions

Table des matières

Objectifs

CONNAÎTRE

- Tracer le graphique d'une fonction de référence.
- Associer un type de fonction de référence à une situation donnée.
- Identifier la relation de réciprocité qui unit les fonctions $x \to x^2$ et $x \to \sqrt{x}$, $x \to x^3$ et $x \to \sqrt[3]{x}$.
- Interpréter graphiquement les définitions de croissance, décroissance, extremum, parité.

APPLIQUER

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$.
- Résoudre une inéquation du premier degré.

• Apparier des graphiques de transformées de fonctions de référence et des expressions analytiques et justifier.

• Trouver l'expression analytique d'une transformée d'une fonction de référence à partir de son graphique.

• Tracer le graphique d'une transformée d'une fonction de référence.

• Résoudre algébriquement et graphiquement des équations du type $f(x) = k$ et des inéquations du type $f(x) < k$ où f est une fonction de référence.

• Résoudre algébriquement et graphiquement des équations du type $f(x) = k$ où f est une transformée d'une fonction de référence.

• Reconnaître si l'expression analytique ou le graphique est ou non une fonction

• Repérer sur base du graphique d'une fonction donnée, le domaine, l'ensemble-image, les zéros, l'ordonnée à l'origine, la parité, la croissance, les extrema (tableau de variations). Se servir du graphique pour répondre à des questions concernant certaines valeurs de la variable ou de ses images

• Déterminer par calcul le domaine, les zéros, l'ordonnée à l'origine et la parité d'une fonction

TRANSFÉRER

• Modéliser une situation par une transformée d'une fonction de référence pour en tirer des informations.

En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'une calculette scientifique.

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/fonctions

2.0 Prérequis

Puissances

Effectue. La réponse est un nombre.

1. $(-1)^3 =$
2. $-1^3 =$
3. $-(-1)^3 =$
4. $1^{-3} =$
5. $4^{-2} =$
6. $-5^2 =$
7. $(-5)^{-3} =$
8. $(-2)^4 =$
9. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} =$
10. $-(-5)^3 =$
11. $(-3)^{-3} =$
12. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} =$
13. $(-2)^{-1} =$
14. $-3^2 =$
15. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} =$
16. $(-4)^3 =$
17. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} =$
18. $(-5)^4 =$
19. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} =$
20. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{4} =$
21. $(-4)^{-3} =$

Écris à l'aide de puissances au numérateur uniquement

1. $\frac{x^3}{y^2} =$
2. $\frac{x^4}{y^{-3}} =$
3. $\frac{x^{-3}}{y^2} =$
4. $\frac{x^{-5}}{y^{-3}} =$
5. $\frac{x^3y^{-4}}{z^{-2}} =$
6. $\frac{4x^{-3}}{y^2} =$
7. $-\frac{4x^{-3}}{3y^{-2}} =$
8. $\frac{x^3z^{-3}}{5y^{-2}} =$
9. $\frac{x^{-3}z^2}{4y^2z^{-4}} =$
10. $\frac{-x^3y^{-1}}{-3z^{-4}y^2} =$
11. $\frac{15\left(x^3.y^{-2}\right)^{-1}}{45\left(y^2z\right)^3} =$
12. $\frac{-45\left(x^3z^{-4}\right)^3}{18\left(y^2z^{-1}\right)^{-2}} =$

2

Écris à l'aide de puissances à exposant positif

1. $x.y^{-3} =$
2. $7x^2.y^{-3} =$
3. $2x^{-5}.y =$
4. $-3x^{-2}.y^{-3} =$
5. $\dfrac{2}{x^{-5}} =$
6. $\dfrac{2y^2}{x^{-5}} =$
7. $\dfrac{3y^{-3}}{x^{-5}} =$
8. $\dfrac{-4x^{-1}}{3x^2y^{-5}} =$
9. $\dfrac{5x^{-1}}{15x^{-2}y^5} =$
10. $\left(\dfrac{-4x^{-1}}{12x^2y}\right)^2 =$
11. $\left(\dfrac{-4x^{-1}}{x^2y^{-5}}\right)^{-1} . \dfrac{1}{x} =$
12. $\left(\dfrac{3x^2}{y^3}\right)^{-4} \left(\dfrac{-4x^{-1}}{x^2y^{-3}}\right)^2 =$

a²-b²

$a^2 - b^2 = (a-b) . (a+b)$

Effectue

1. $(x-2) . (x+2) =$
2. $\left(\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{2b}{5}\right) . \left(\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{2b}{5}\right) =$
3. $(-5c+2a) . (2a+5c) =$
4. $(3k-2) . (3k+2) . \left(9k^2+4\right) =$
5. $(x-2) . (3x+6) =$
6. $\left(2+\sqrt{5}\right) . \left(2-\sqrt{5}\right) =$
7. $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) . \left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) =$
8. $\left(-\sqrt{6}-\sqrt{24}\right) . \left(-\sqrt{6}+\sqrt{24}\right) =$

Factorise

1. $3xy + 3xz =$
2. $4a^2 - 25b^2 =$
3. $x^3 - 16x =$
4. $5x^4 - 20x^2 =$
5. $(2x+3)^2 - 49 =$
6. $(x-1)^2 - (2x-3)^2 =$
7. $x^4 - 16 =$
8. $(2x+3)^2 - (2x-3)^2$
9. $x^4 - (2x-3)^2 =$

Chasse les radicaux du dénominateur

1. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} =$

3. $\dfrac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

4. $\dfrac{5}{3-\sqrt{2}} =$

5. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}+3} =$

6. $\dfrac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$

7. $\dfrac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2} =$

8. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} =$

9. $\dfrac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} =$

10. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$

11. $\dfrac{3\sqrt{2}+3}{\sqrt{5}} =$

12. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} =$

2

Racines

a) Simplifie les radicaux.

b) Effectue, si possible.

c) Chasse les radicaux du dénominateur s'il y en a.

1. $\sqrt{162} =$

2. $\sqrt{500} =$

3. $6\sqrt{3} - \sqrt{27} =$

4. $\sqrt{8} - 4\sqrt{20} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{18} =$

5. $\sqrt{12} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{45} =$

6. $\dfrac{2}{\sqrt{7}} + 3\sqrt{28} - \sqrt{63} =$

7. $2\sqrt{28} + 6.\sqrt{\dfrac{7}{4}} + 14.\sqrt{\dfrac{1}{7}} =$

8. $\dfrac{7}{2\sqrt{5}} =$

9. $\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{10}} =$

10. $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$

11. $\dfrac{3\sqrt{2}-3\sqrt{20}}{\sqrt{54}} =$

12. $4\sqrt{8}.\sqrt{27} =$

13. $\sqrt{3}.\left(\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{81}\right) =$

14. $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{12}\right).\left(\sqrt{27}-2\sqrt{24}\right) =$

15. $\left(2+\sqrt{8}\right)^2 =$

16. $\dfrac{2\sqrt{32}-3\sqrt{20}}{\sqrt{12}} =$

17. $\dfrac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{8}+2\sqrt{18}} =$

18. $\dfrac{\sqrt{24}+4\sqrt{2}}{\sqrt{32}-2\sqrt{6}} =$

19. $\sqrt[3]{32} =$

20. $\sqrt[3]{-81} =$

21. $\sqrt[3]{54} =$

22. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250} =$

23. $\sqrt[3]{0,008} =$

24. $2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3} =$

25. $\sqrt[3]{27}-3 =$

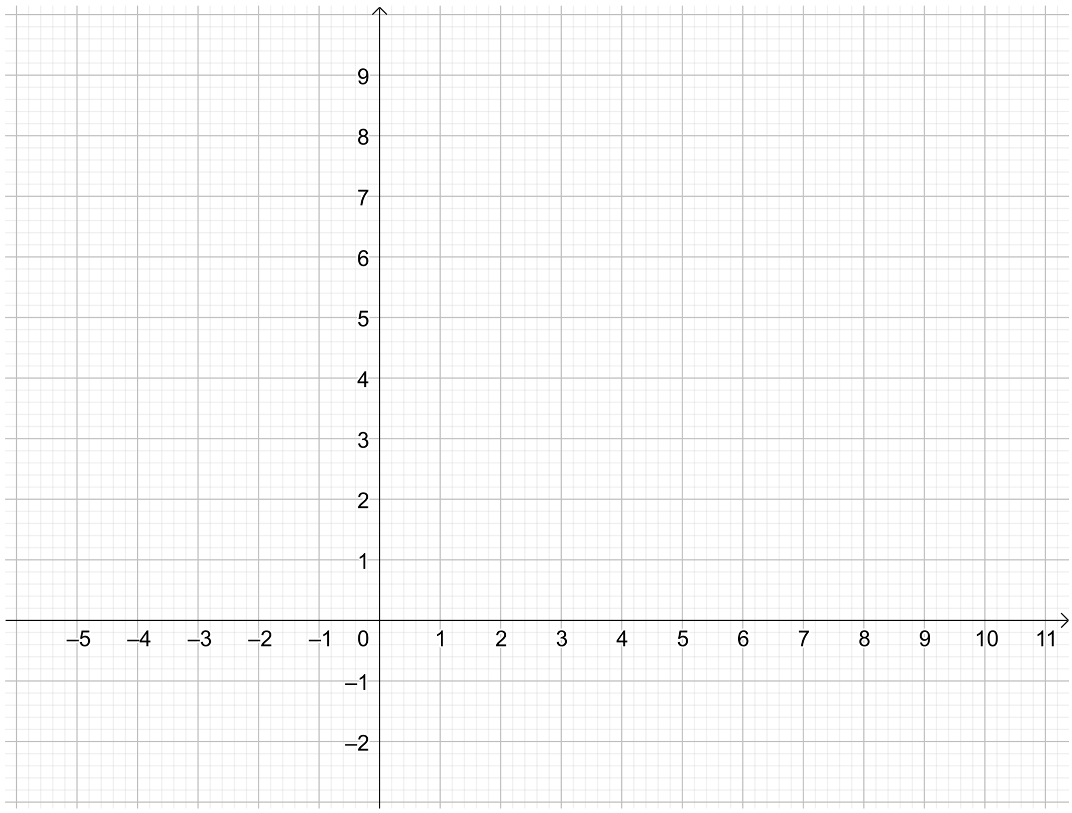
26. $2\sqrt[3]{640}+3\sqrt[3]{80}-2\sqrt[3]{270} =$

Fonctions du premier degré

Complète les tableaux et représente les fonctions f et g (dans ton cahier).

x	$f(x) = 2x+6$
0	
1	
2	
3	
-1	
-2	
-3	

x	$g(x) = -3x+7$
0	
1	
2	
3	
-1	
-2	
-3	



Quelles sont les pentes de ces deux fonctions ?

Racine et signe

Détermine la racine de f en résolvant l'équation $f(x) = 0$.
Détermine la racine de g en résolvant l'équation $g(x) = 0$.
Dresse le tableau de signe de ces deux fonctions.

Pour une fonction du premier degré,
tout tourne autour de « m ».

Exercice

Trace la fonction et dresse son tableau de signe. Quelle est sa pente ?

1. $f_1(x) = 2x + 1$
2. $f_2(x) = -2x + 1$
3. $f_3(x) = 3 - \frac{1}{2}x$

Inéquations du premier degré

• Quelles sont les solutions de $4x + 3 > 0$?

Comme il y a 0 dans le membre de droite, étudions le signe de $4x + 3$.

x		$-\frac{3}{4}$	
$4x+3$	$-$	0	$+$

L'inéquation signifie que $4x + 3$ doit être positif.
Il suffit donc de sélectionner la dernière colonne ($+$).
Attention, les solutions sont à la première ligne (x) !
Il s'agit de $x > -\dfrac{3}{4}$.

$S = \left]-\frac{3}{4}; \rightarrow\right[= \left]-\frac{3}{4}; +\infty\right[$

• Les solutions de $1 - 3x \leq 0$?

Ici aussi, grâce au 0 du membre de droite, je fais un tableau de signe.

x		$\frac{1}{3}$	
$1-3x$		0	

L'inéquation signifie que $1-3x$ doit être négatif ou nul.

Je sélectionne donc

Il s'agit de x

$S =$

• Et pour $2+3x \geq 0$?

Grâce au 0 du membre de droite, je fais un

x			
$2+3x$		0	

Je sélectionne

x

$S =$

Sans tableau de signe

Il est aussi possible de résoudre une inéquation sans utiliser de tableau de signe.

1. $4x+3>0$

   $4x>-3$

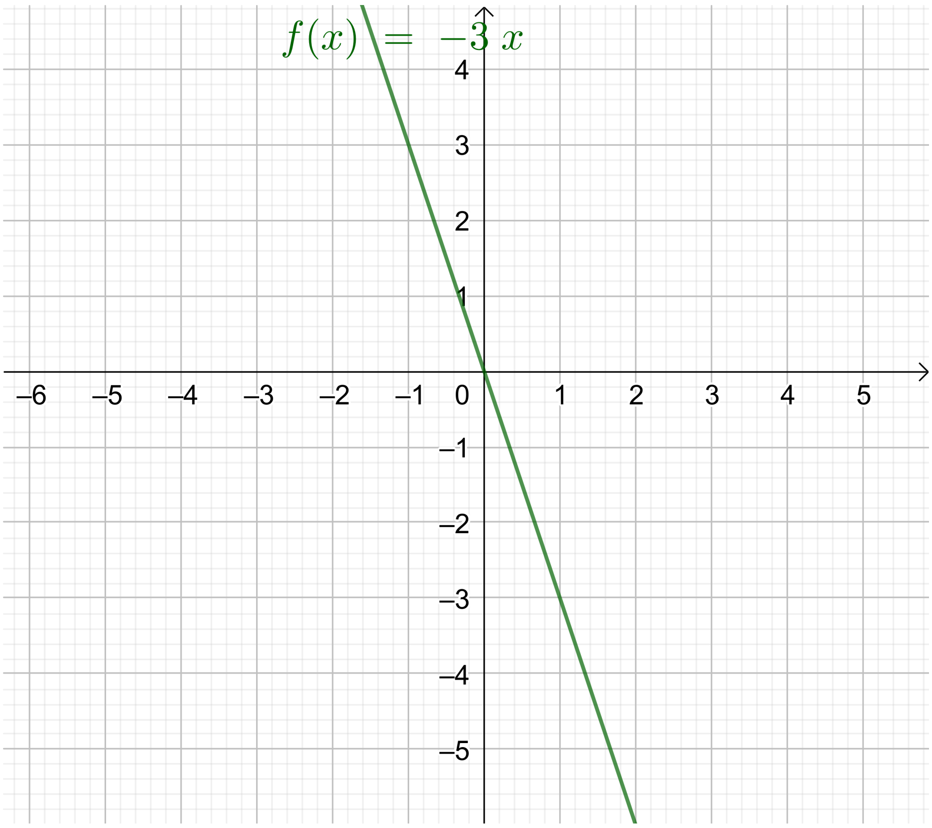
   $x>-\frac{3}{4}$ $\qquad S = \left]-\frac{3}{4};+\infty\right[$

2. $1-3x \leq 0$

   $-3x \leq -1$

   Attention ! $f(x) = -3x$ est une fonction décroissante ($m=-3$) !

   Plus $f(x)$ est petit, plus x est grand !



$x \geq \frac{1}{3}$ $\qquad S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

Exercice

Résous par la méthode de ton choix

1. $3x + 4 > 0$
2. $1 - 2x \geq 0$
3. $1 - 3x \geq 0$
4. $4x - 3 > 0$
5. $1 + 3x \geq 0$
6. $3x + 5 > 0$
7. $3x + 5 > 8$
8. $x^2 - 3x + 5 > x^2 + 1$

2.1 Caractéristiques d'une fonction

Incursion

Combien d'élèves de ton année connais-tu ?
Ceux de ta classe et les autres : 20, 50, 100 ?
Écris la date de naissance de chacun d'eux au format mmjj, par exemple 1210 pour le 10 décembre.

Comment organiser cela ?

Un petit (ou un grand) tableau convient parfaitement.
Fais-le sur la page de gauche de ton cahier.

Nom	Date de naissance
Jeanne	1109
Ludovic	0927
Aziz	0512
Hélène	
Leïla	
...	

En informatique, ce serait le début d'une base de données.

Dans tous les cas, cela s'appelle une **relation.**

Ce serait sympa de fêter les anniversaires.
Il suffit d'inverser les deux colonnes.

Date de naissance	Nom
1109	Jeanne
0927	Ludovic
0512	Aziz
	Hélène
	Leïla
	...

Fais-le dans l'ordre chronologique, comme ceci :

Date de naissance	Nom
...	...
0512	Aziz
...	...
0927	Ludovic
...	...
1109	Jeanne
...	...
	Hélène
...	...
	Leïla
...	...

Si tu connais 50 élèves de ton année, il est presque certain que deux d'entre eux ont leur anniversaire le même jour.

Date de naissance	Nom
...	...
0512	Aziz
...	...
0927	Ludovic
...	...
1109	Jeanne
1109	Camille
...	...
	Hélène
...	...
	Leïla
...	...

Il y a une différence essentielle entre le tableau des dates de naissance et celui des anniversaires.

Pour celui des dates de naissances, chacun a sa ligne : on parle de **fonction**.

Pour celui des anniversaires, une même date peut avoir plusieurs lignes : on parle de **relation** ordinaire (ou non-fonctionnelle).

Dans la suite du chapitre, nous n'allons plus utiliser de nom de personnes (ou de prénom) mais bien des nombres symbolisés par la variable x.

x	y
1	1109
2	0927
8	0512
-4	
3,14	
...	

Lorsque chaque x donne un seul y, la relation est une **fonction.**

Complète :

Une fonction est une relation pour laquelle

Exemples

1. La fonction f définie par $f(x) = -3x + 7$.

x	y=f(x)
1	4
3	-2
-1	10
0	7

2. La fonction f définie par $f(x) = x^2$.

x	y=f(x)
1	1
3	9
-1	1
0	0

3. La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

x	y=f(x)
1	1
3	$\frac{1}{3}$
-1	-1
0	$\times$

Le premier exemple est connu : c'est une fonction du premier degré.

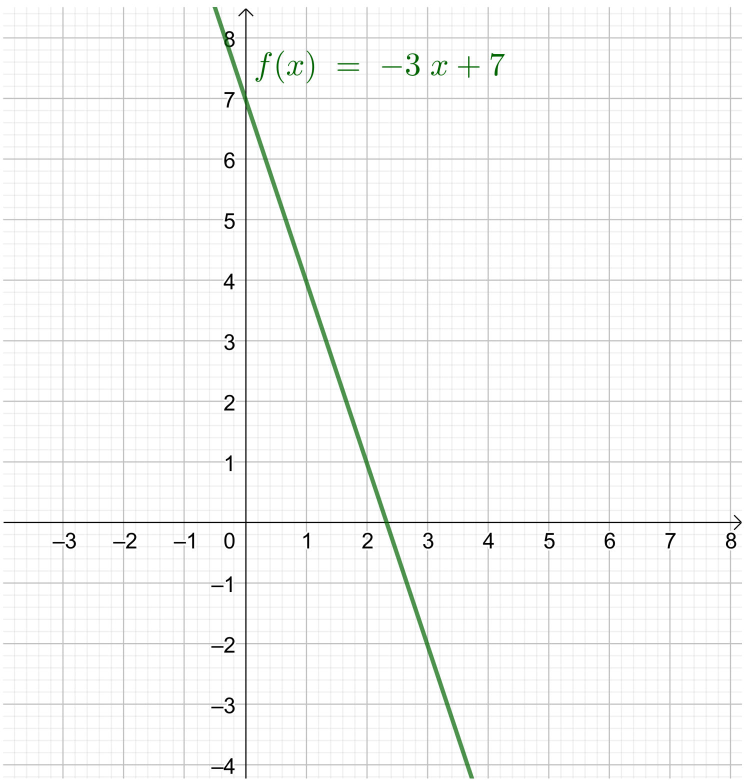
Dans le dernier exemple, x=0 n'a pas d'image. On dit que 0 n'appartient pas au domaine de la fonction f.

Le domaine des deux premiers exemples est $\mathbb{R}$.

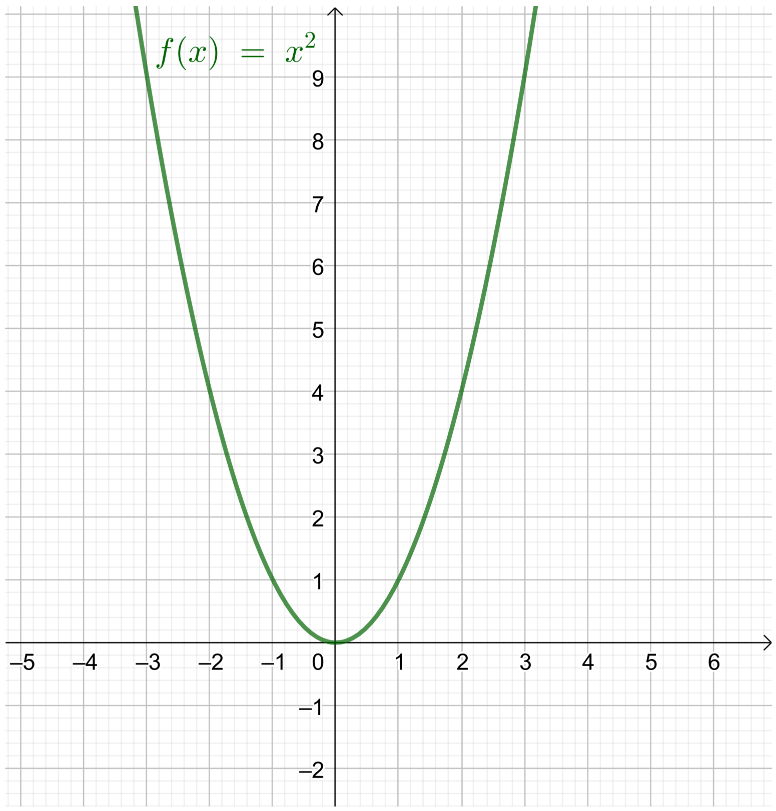
La variable x est représentée sur l'axe horizontal,

son image f(x) sur l'axe vertical.

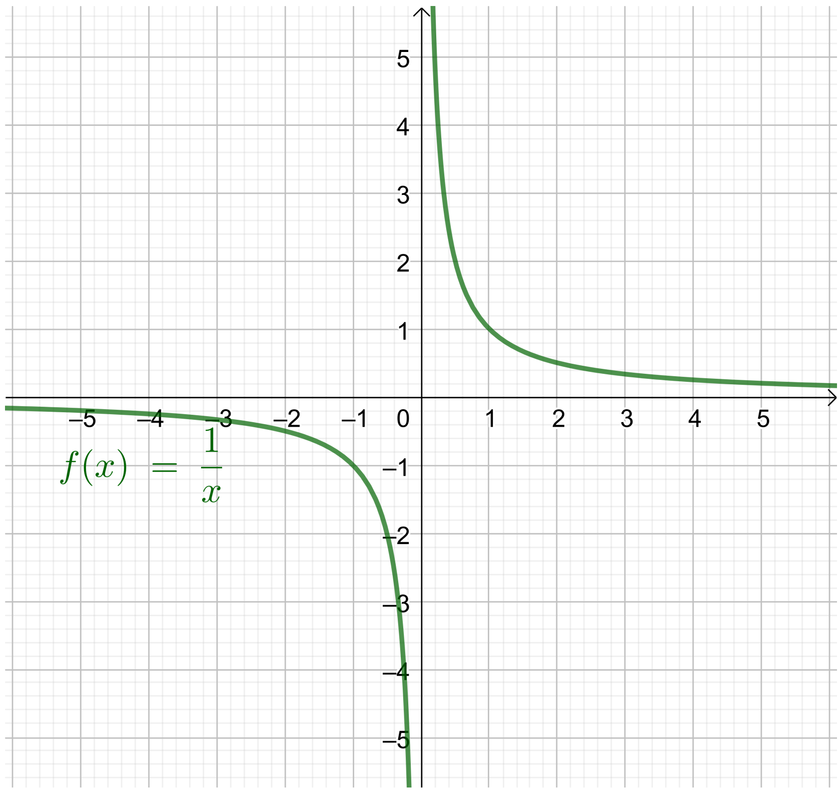
Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3



Domaine et ensemble-image

Le domaine est l'ensemble des x de la fonction (condition d'existence).

L'ensemble-image en est l'ensemble des y.

Exemple 1

Le domaine est $\mathbb{R}$ (pas de condition d'existence).

L'ensemble-image est $\mathbb{R}$.

Exemple 2

Le domaine est $\mathbb{R}$ (pas de condition d'existence).

L'ensemble-image est $\mathbb{R}^+ = [0; \rightarrow[$.

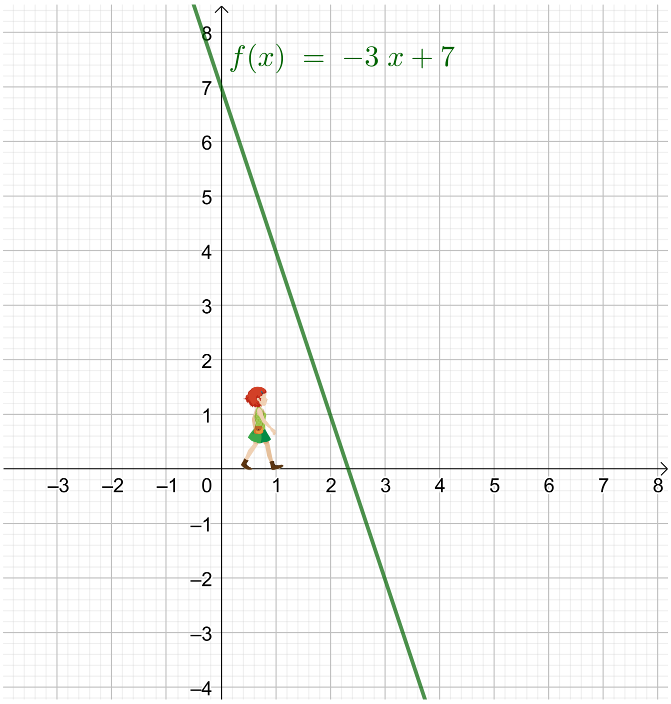
Exemple 3

Le domaine est $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Condition d'existence : $x \neq 0$).

L'ensemble-image est $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Racines et signe d'une fonction

Exemple 1



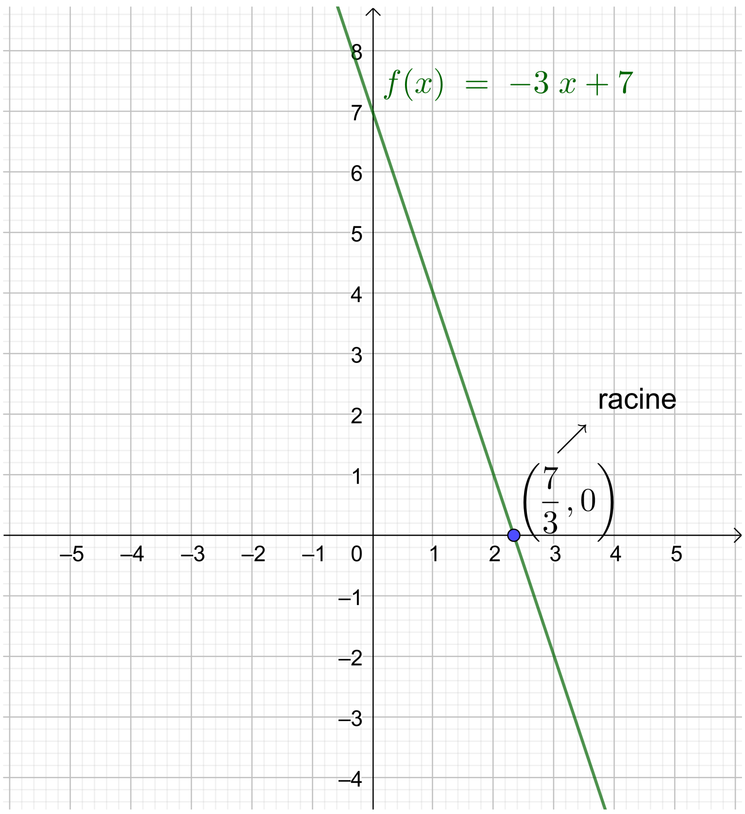
De gauche à droite,
l'image de x est positive, nulle puis négative.
Il s'agit d'une fonction du premier degré où m<0 car m=-3.

x		$\frac{7}{3}$	
y	+	0	-

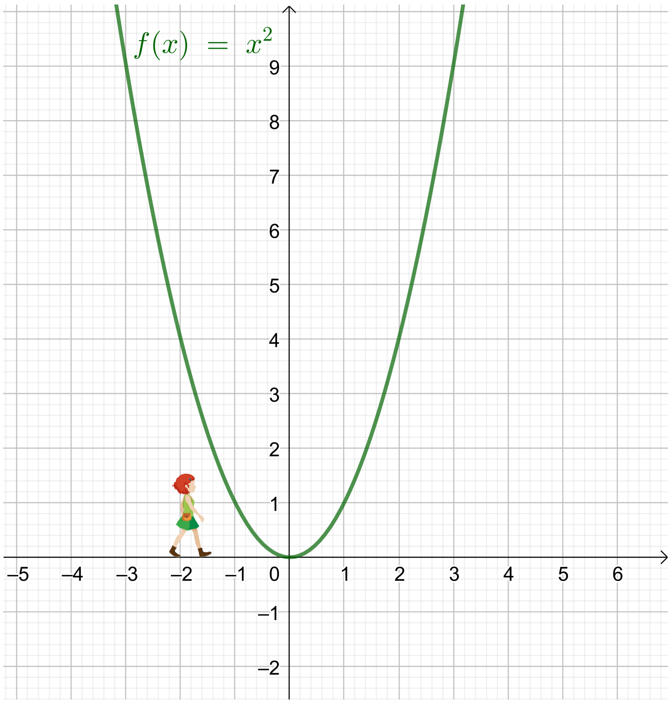
$\frac{7}{3}$ est obtenu
en résolvant $-3x + 7 = 0$.

Définition

On appelle racine (ou zéro) d'une fonction tout x dont l'image par f est zéro.



Exemple 2

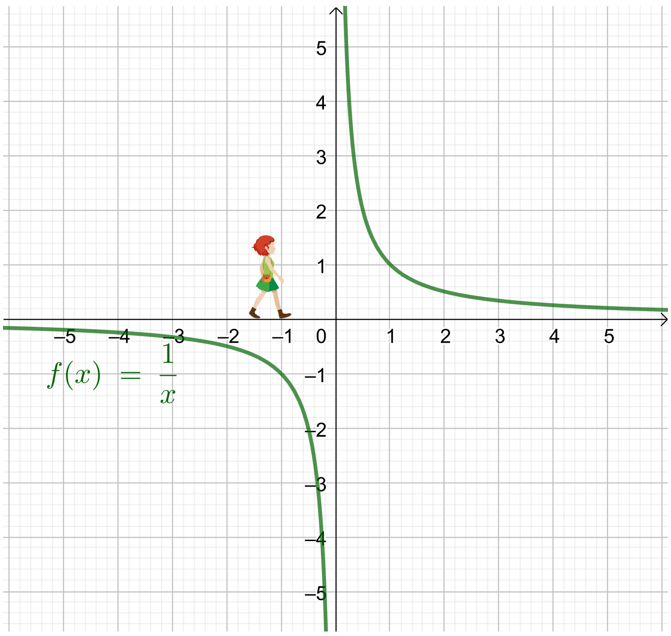


De gauche à droite,
l'image de x est positive, nulle puis encore positive.

x		0	
y	+	0	+

0 est la racine car $0^2 = 0$.

Exemple 3



De gauche à droite,
l'image de x est négative,
puis positive.
Attention à lever les pieds en $x = 0$!
0 n'a pas d'image.

x		0	
y	-	|	+

Cette fonction n'a pas de racine car $\frac{1}{x} \neq 0$.
Une fraction est nulle lorsque son numérateur est nul.

Exercices

1. Parmi les énoncés suivants, quels sont ceux qui se rapportent à une fonction de x, variable réelle ? La relation

   (a) x a pour carré

   (b) x est le cube de

   (c) x est le carré de

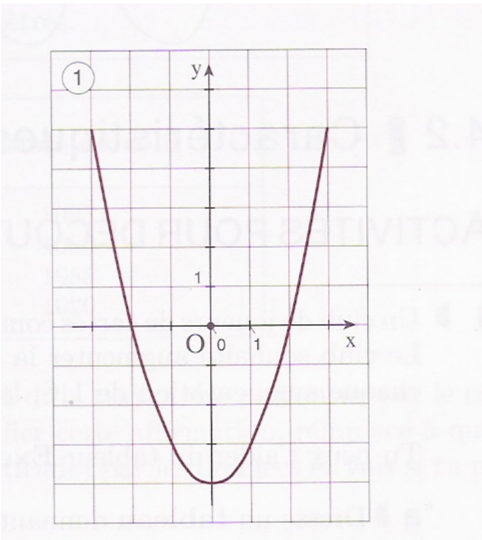
   (d) x est le double de

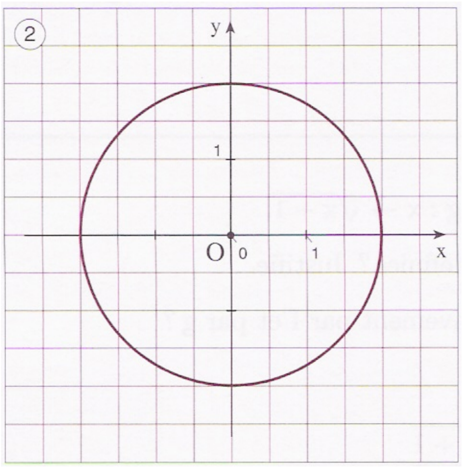
   (e) x a pour valeur absolue

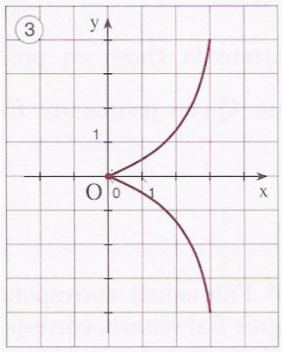
   (f) x a pour inverse

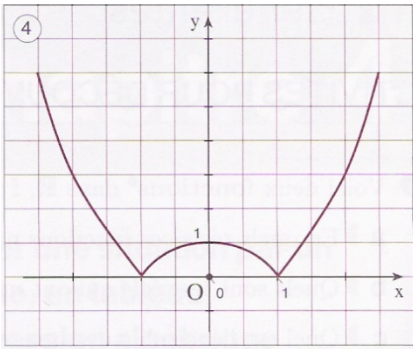
   (g) x est la valeur absolue de

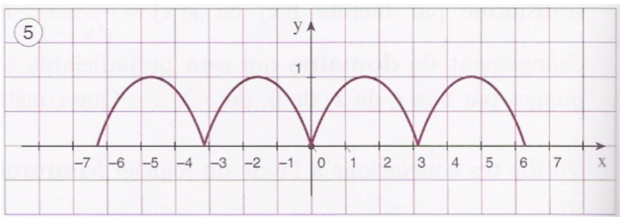
2. Parmi les graphes suivants, quels sont ceux qui représentent une fonction numérique ? Donne alors son domaine et son ensemble-image.

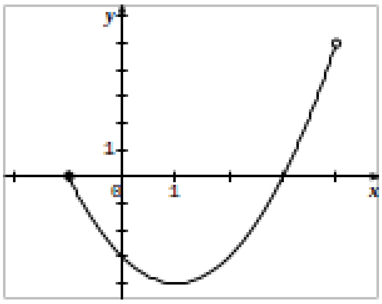
   (a) 

   (b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

3. Détermine le domaine de

   (a) $f(x) = \dfrac{x+3}{3x-1}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

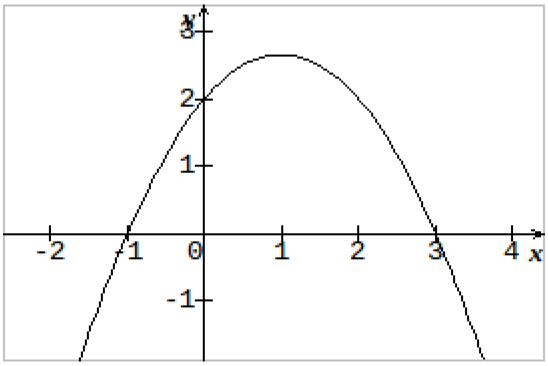
   (c) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+3}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x+1}$

   (e) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-9}$

4. Détermine le domaine et l'intersection avec les axes de coordonnées de la fonction f

   (a) dont le graphe est représenté par



(b) telle que $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$

(c) $f(x) = x^3 - 3x$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

(e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

(f) $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-1}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x}$

(h) $f(x) = \dfrac{2}{7x-3}$

(i) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

(j) $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$

(k) $f(x) = \dfrac{-x^2-9}{\sqrt{x+4}}$

(l) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{1-x}}$

(m) $f(x) = \dfrac{4x+2}{\sqrt{2x-3}}$

(n) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x-1}}$

(o) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{1-x}}$

(p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-1}$

(q) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-16}$

(r) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x-2}$

(s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{1-4x}}$

(t) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x-1}}$

(u) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x-1}}$

5. Détermine le domaine, les intersections avec les axes et le tableau de signe de la fonction f . Trace ensuite son graphique.

   (a) $f\left(x\right)=2x-4$

   (b) $f\left(x\right)=6-4x$

   (c) $f\left(x\right)=5x+2$

   (d) $f\left(x\right)=-3x$

2.2 Variation et parité d'une fonction

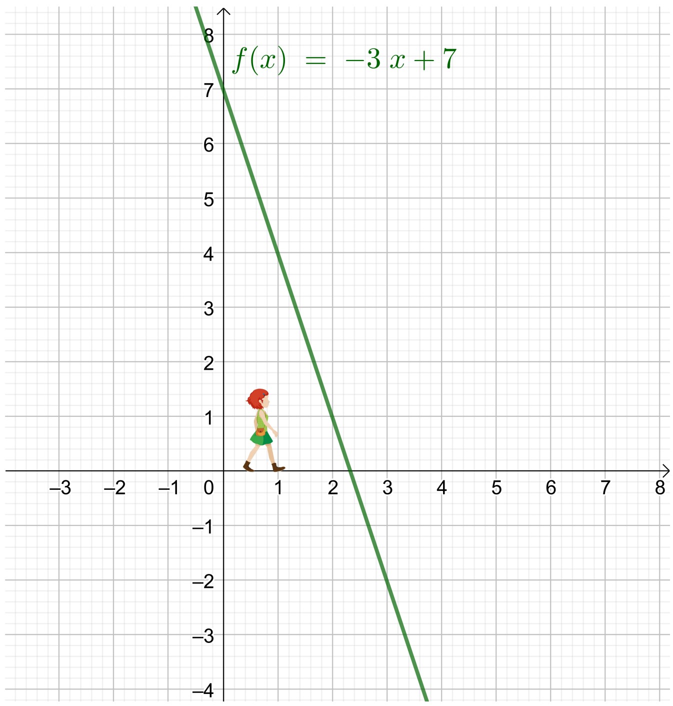
Variation

Une fonction du premier degré, ça monte tout le temps ou ça descend tout le temps.
Je veux bien, mais ça veut dire quoi « tout le temps » ?
Nous avons besoin d'une définition avec x et y
car une fonction relie x et y.

Fonction croissante : plus x est grand, plus y est grand.

Fonction décroissante : plus x est

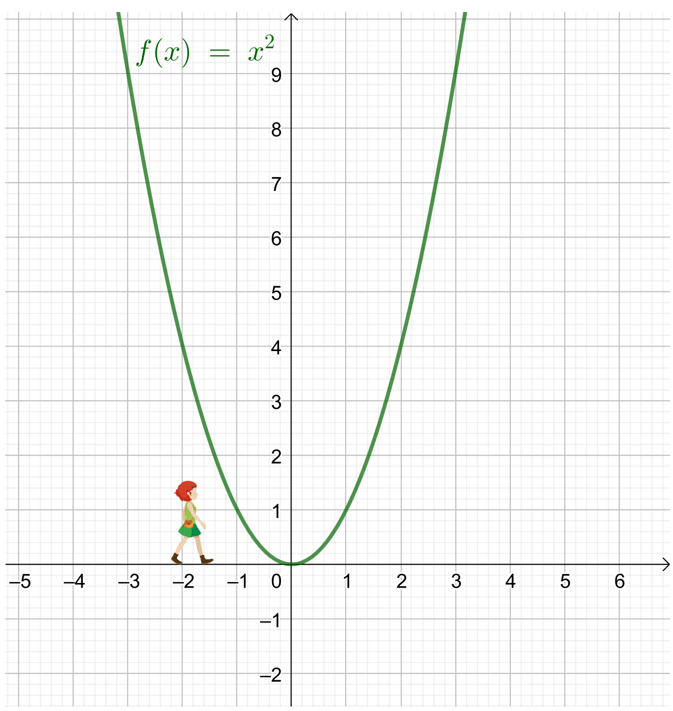
Exemple 1



Il s'agit d'une
fonction décroissante.

x	
y	↘

Exemple 2



De gauche à droite,
cette fonction est décroissante
puis croissante.

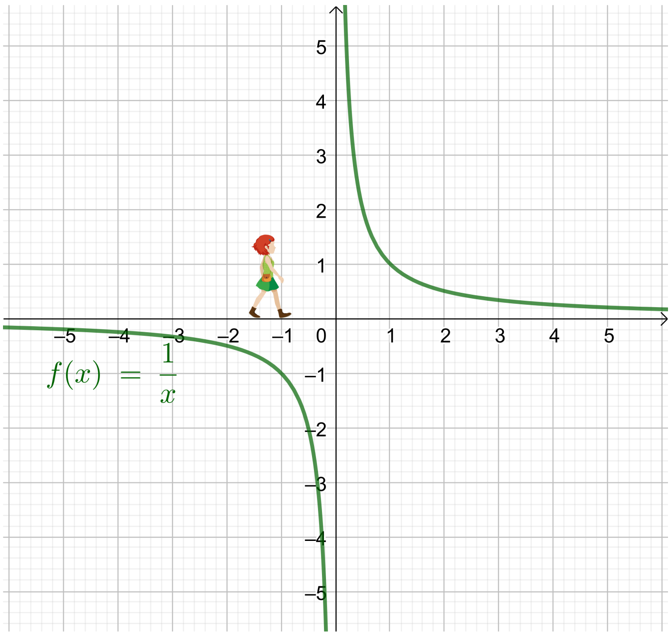
x		0	
y	↘	m	↗

Nous dirons que
0 est un minimum.

Définition

On appelle minimum d'une fonction un x qui a une image plus petite que ses voisins.

Exemple 3



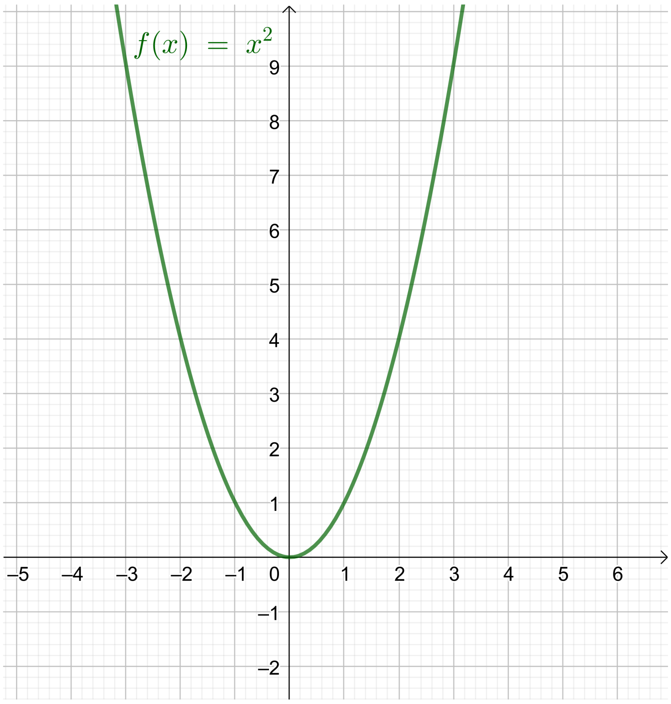
De gauche à droite,
cette fonction
est décroissante,
puis décroissante !
Attention à lever les pieds
en $x = 0$!
0 n'a pas d'image.

x		0	
y	$\searrow$	|	$\searrow$

Parité

J'ai souvent envie de couper une fonction en deux.
Pas toi ?
Attention, c'est contagieux.
L'exemple 1, je ne vois pas comment le couper en deux.
Regardons les deux autres.

Exemple 2



Cette fonction est coupée en deux par l'axe vertical.

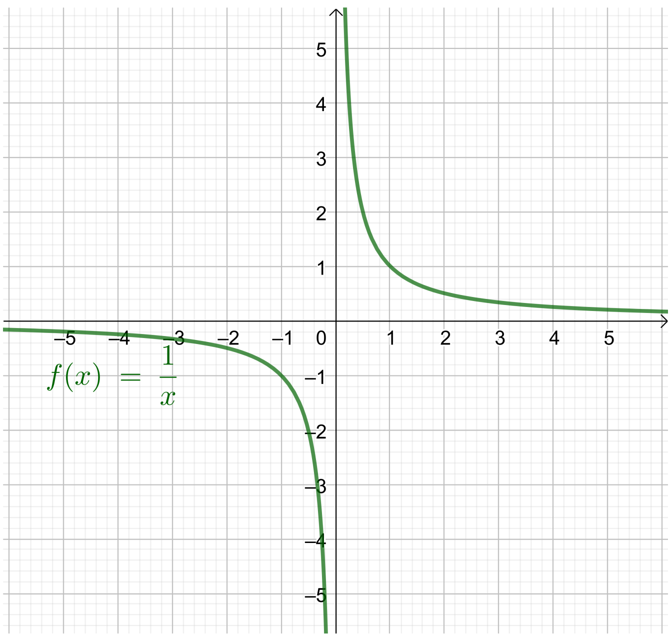
Qu'est-ce que cela veut dire ?

Cela veut dire que l'axe vertical est axe de symétrie : $f(-x) = f(x)$.

Définition

Lorsque $f(-x) = f(x)$ on dit que la fonction est paire.

Exemple 3



Avant de dire la même chose, remarque que l'axe vertical n'est pas axe de symétrie.

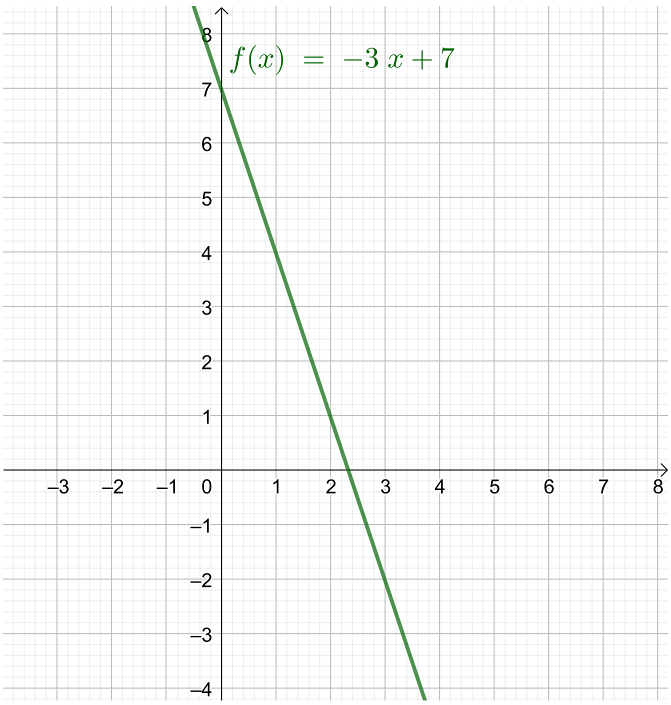
En fait, $f(-x) = -f(x)$.

$(0; 0)$ est centre de symétrie.

Définition

Lorsque $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ on dit que la fonction est **impaire.**

Exemple 1



Cette fonction n'est ni paire, ni impaire.

$$f\left(-x\right)=$$

$$f\left(-x\right)=-($$

Il ne s'agit ni de $f\left(x\right)$ ni de $-f\left(x\right)$.

Exercices

1. Pour la fonction f ci-dessous,

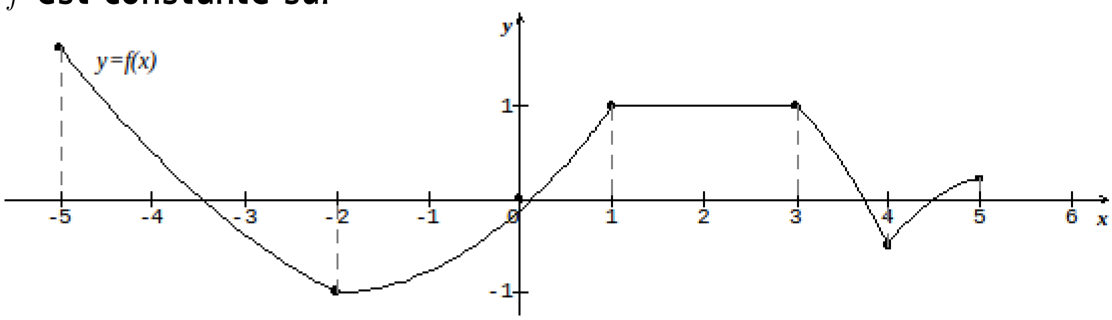
   $dom\ f=$

   $im\ f=$

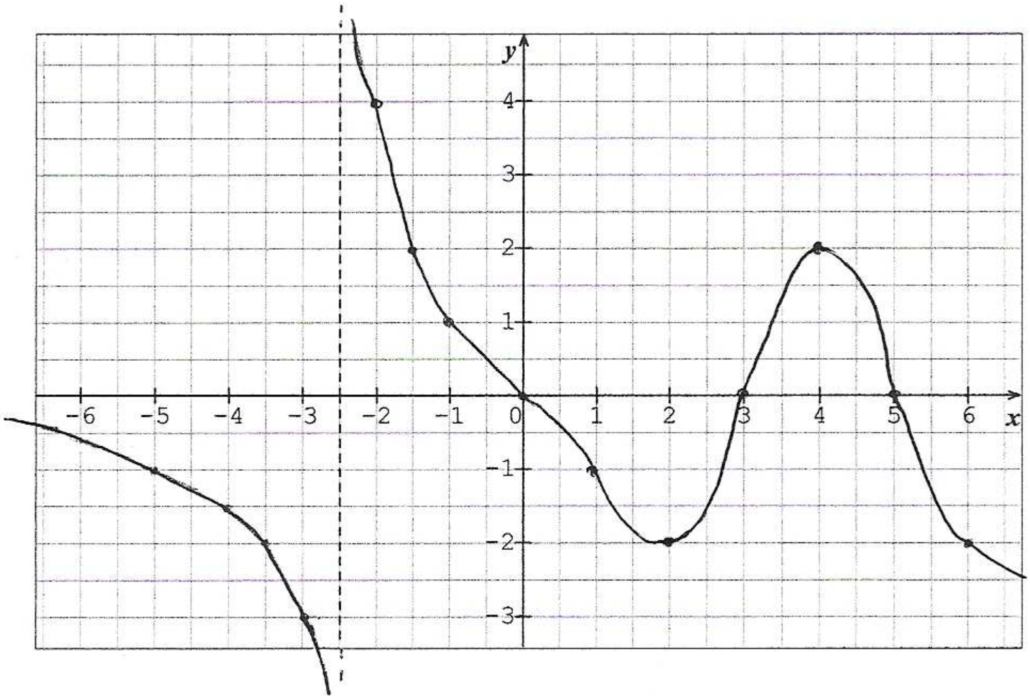
   f est strictement croissante sur

   f est strictement décroissante sur

   f est constante sur



2. Pour la fonction ci-dessous, détermine :



(a) Son domaine

(b) L'image de -4 et 2

(c) $f(1)$ et $f(4)$

(d) Les antécédents de -2

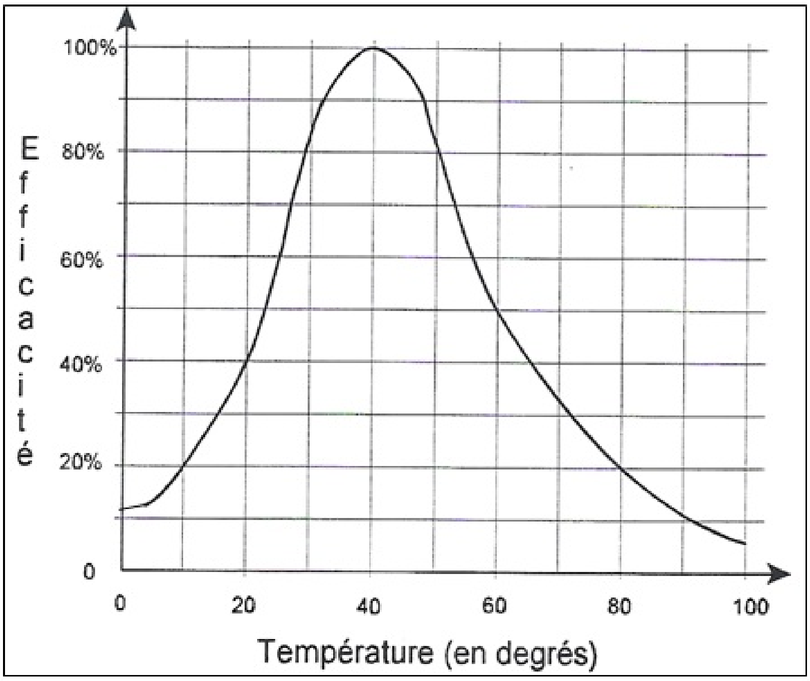
(e) $f(\quad) = 2$

(f) Les coordonnées des maximum et minimum éventuels

(g) Ses zéros

(h) Son tableau de variation

3. On étudie l'efficacité (en pourcentage) d'une poudre à laver en fonction de la température d'utilisation de l'eau de lavage utilisée. On consigne les résultats de l'étude dans le graphe suivant :



(a) Établis un tableau de points de la fonction décrite sur $[0; 100]$.

(b) Détermine la température à laquelle la poudre a la plus grande efficacité.

(c) A quelle(s) température(s) l'efficacité du produit est-elle de 80% ?

(d) Calcule l'intervalle de température qui permet à la poudre d'avoir une efficacité d'au moins 60%.

(e) Décris la variation de la fonction proposée (croissance, décroissance, maximum, minimum)

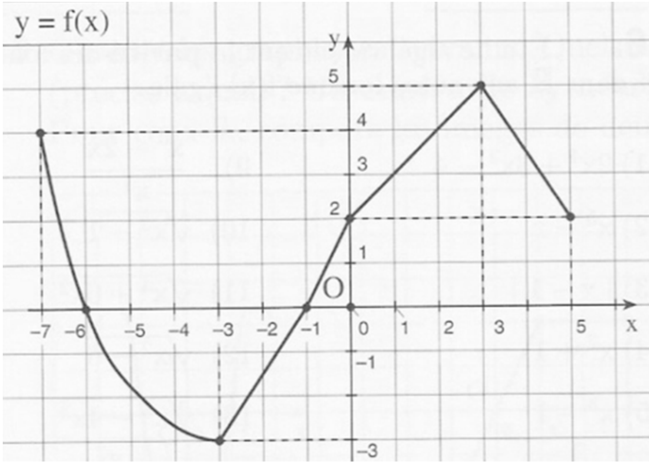
4. Justifie !

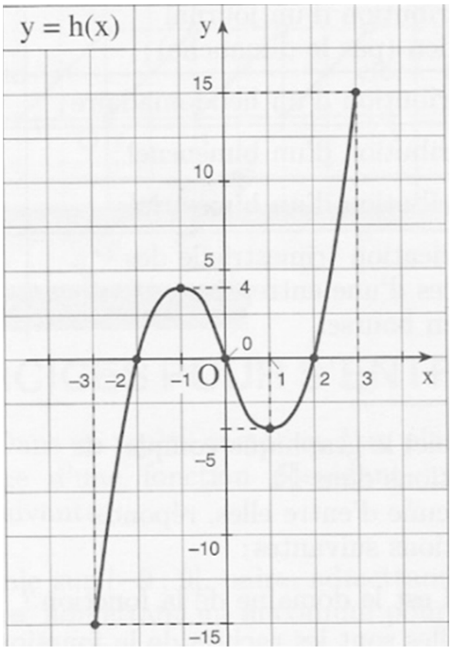
(a) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ est paire car $f(-x) =$

(b) $f(x) = 3x^3 - x$ est impaire car $f(-x) =$

(c) $f(x) = 2x^3 + 1$ n'est ni paire ni impaire car $f(-x) =$

5. Voici le graphique complet de 2 fonctions. Pour chacune d'entre elles, détermine le domaine, l'ensemble-image, les zéros, l'intersection avec l'axe des ordonnées, la parité et le tableau de variation.

(a) 

(b) 

6. Étudie algébriquement la parité des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 4$

(b) $f(x) = x^3 - 3x$

(c) $f(x) = x^3 - 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 7}{x^4}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{2x^2}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^5}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^4 - x + 1}{x}$

(i) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x}$

2.3 Les sept fonctions de référence

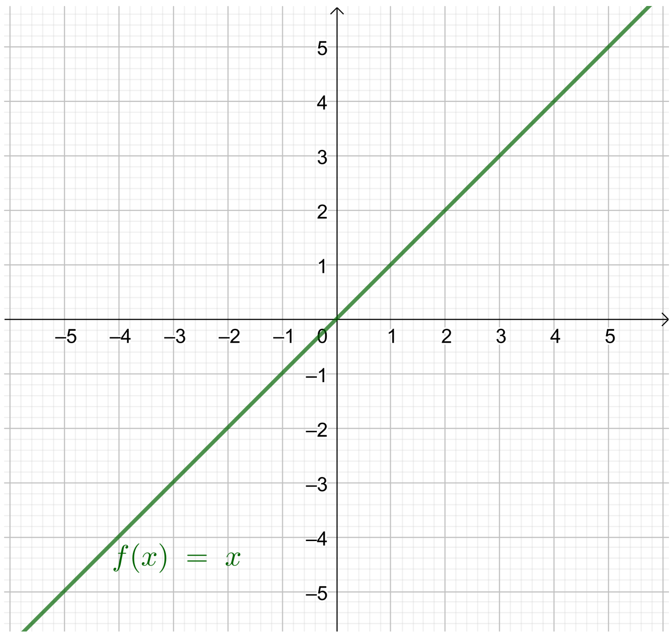
La fonction $x \to x$ (fonction identique)

C'est la fonction la plus paresseuse de toutes : elle ne fait rien.

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est 2, de 18 c'est 18, de 0 c'est 0,...

$f(x) = x$

x	y=f(x)
1	1
2	2
-1	-1
0	0
-2	-2



$dom\, f = \mathbb{R}$

$im\, f = \mathbb{R}$

Signe

x		0	
y	-	0	+

0 est la racine

Variation

x	
y	$\nearrow$

Cette fonction est croissante.

$f(-x) = -x = -f(x)$

Cette fonction est impaire.

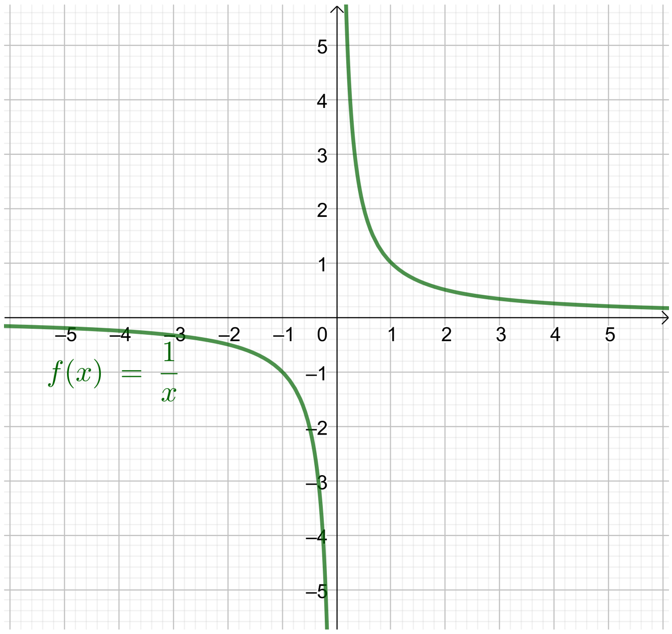
La fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ (fonction inverse)

Nous la connaissons déjà. La petite fille doit lever les pieds en x=0...

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est $\frac{1}{2}$, de -1 c'est -1, 0 n'a pas d'image.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

x	y=f(x)
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2
0	rien
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$



$dom\, f = \mathbb{R}_0$

$im\, f = \mathbb{R}_0$

Signe

x		0	
y	-	|	+

Pas de racine

Variation

x		0	
y	$\searrow$	|	$\searrow$

Cette fonction n'est pas décroissante partout : $f(-1) < f(1)$.

$f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

Cette fonction est impaire.

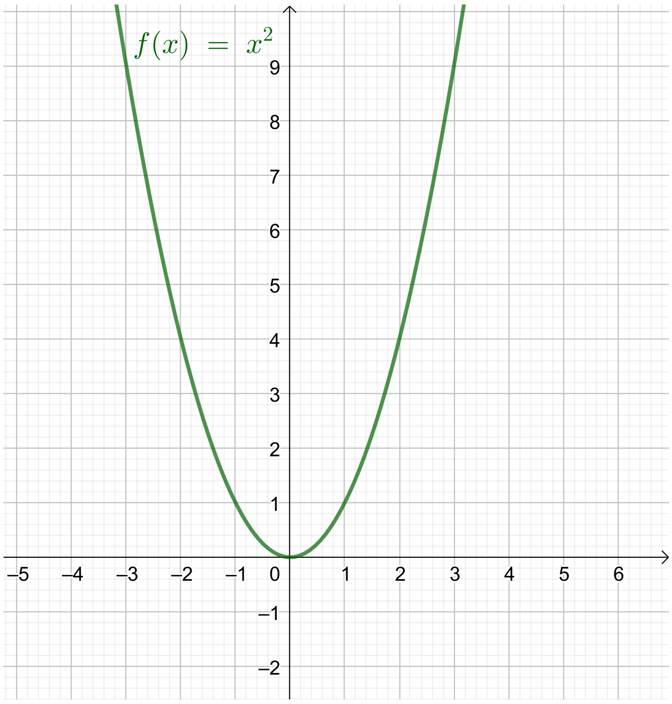
La fonction $x \to x^2$ (fonction carré)

Nous la connaissons déjà.

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est 4, de -1 c'est 1, de 0 c'est 0, ...

$f(x) = x^2$

x	y=f(x)
1	1
2	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
-1	1
-2	4



$dom\, f = \mathbb{R}$

$im\, f = \mathbb{R}^+$

Signe

x		0	
y	+	0	+

0 est la racine

Variation

x		0	
y	$\searrow$	0	$\nearrow$

0 est le minimum.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
Cette fonction est paire.

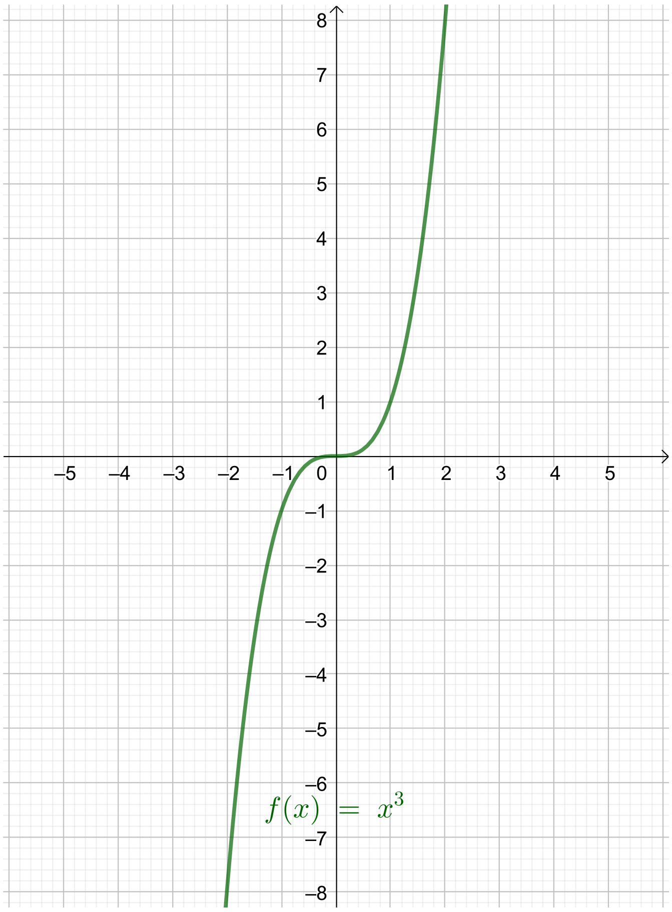
La fonction $x \to x^3$ (fonction cube)

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est 8, de -1 c'est -1, de 0 c'est 0, ...

$f(x) = x^3$

2

x	y=f(x)
1	1
2	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
0	0
-1	-1
-2	−8



$dom\, f = \mathbb{R}$

$im\, f = \mathbb{R}$

Signe

x		0	
y	-	0	+

0 est la racine

Variation

x	
y	$\nearrow$

Cette fonction est croissante.

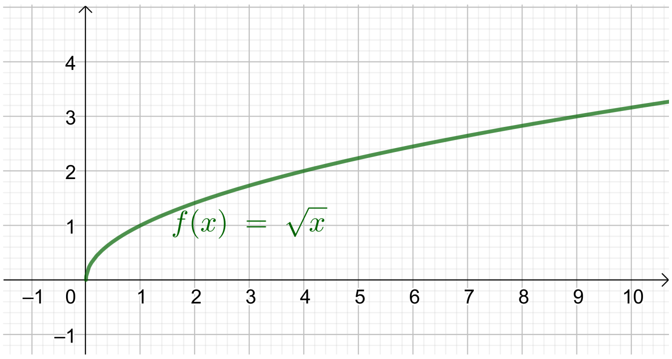
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
Cette fonction est impaire.

La fonction $x \to \sqrt{x}$ (radical)

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est $\sqrt{2}$, de 4 c'est 2, de 0 c'est 0, ...

$f(x) = \sqrt{x}$

x	y=f(x)
1	1
4	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	0
9	3



$dom\, f = \mathbb{R}^+$

$im\, f = \mathbb{R}^+$

Signe

x		0	
y	///	0	+

0 est la racine.

Variation

x		0	
y	///	0	$\nearrow$

0 est le minimum ; cette fonction est croissante.

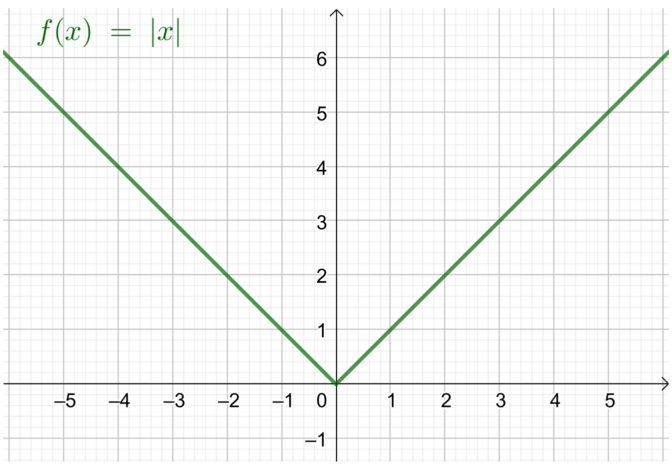
$f(-x)$ n'a aucun sens.
Cette fonction n'est ni paire ni impaire.

La fonction $x \to |x|$ (valeur absolue)

L'image de 1 est 1, l'image de 2 est 2, de -1 c'est 1, de 0 c'est 0, ...

$f(x) = |x|$

x	y=f(x)
1	1
2	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0
-1	1
-2	2



$dom\, f = \mathbb{R}$

$im\, f = \mathbb{R}^+$

Signe

x		0	
y	+	0	+

0 est la racine

Variation

x		0	
y	$\searrow$	0	$\nearrow$

0 est le minimum.

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

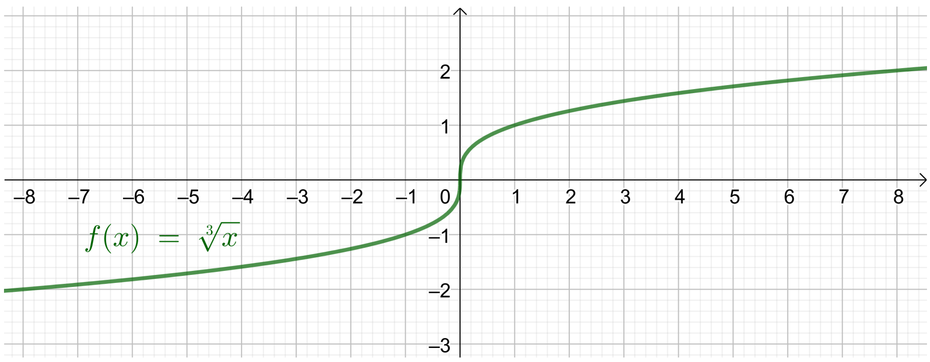
Cette fonction est paire.

La fonction $x \to \sqrt[3]{x}$ (racine cubique)

L'image de 1 est 1, l'image de 8 est 2, de -1 c'est -1, de 0 c'est 0, ...

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

x	y=f(x)
1	1
8	2
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	0
-1	-1
-8	−2



$dom\, f = \mathbb{R}$

$im\, f = \mathbb{R}$

Signe

x		0	
y	-	0	+

0 est la racine

Variation

x	
y	$\nearrow$

Cette fonction est croissante.

$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$

Cette fonction est impaire.

Exercices

1. Résoudre algébriquement et graphiquement les équations suivantes

   (a) $2x-3=4$

   (b) $-x+3=-2$

   (c) $x^2=4$

   (d) $x^2=3$

   (e) $\dfrac{1}{x}=4$

   (f) $\dfrac{1}{x}=-0,2$

   (g) $\sqrt{x}=3,4$

   (h) $\sqrt{x}=-1$

   (i) $x^3=-8$

   (j) $x^3=-1,8$

2. Résoudre algébriquement et graphiquement les inéquations suivantes

   (a) $2x-3<4$

   (b) $-x+3\geq -1$

   (c) $x^2\leq 4$

   (d) $x^2>3$

   (e) $\dfrac{1}{x}<4$

   (f) $\dfrac{1}{x}\geq -0,2$

   (g) $\sqrt{x}<3,4$

   (h) $\sqrt{x}\geq -1$

   (i) $x^3\geq -8$

   (j) $x^3\leq -1,8$

3. Résous à l'aide d'un tableau de signe.

   (a) $(x+2)\,.\,(7-3x)\leq 0$

   (b) $x^2.\,(2x+3)\geq 0$

(c) $\dfrac{4x+7}{3x+2} < 0$

(d) $\dfrac{7-3x}{2x+1} \leq 2$

(e) $\dfrac{4x+7}{x^3} < 0$

(f) $\dfrac{4x+7}{3x+2} \geq -3$

(g) $\dfrac{4x+7}{2x+2} < 2$

2.4 Relation de réciprocité

Cube et racine cubique

Observons la fonction « cube » définie par $f(x) = x^3$ et la fonction « racine cubique » définie par $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Ces fonctions sont en quelque sorte le contraire l'une de l'autre.

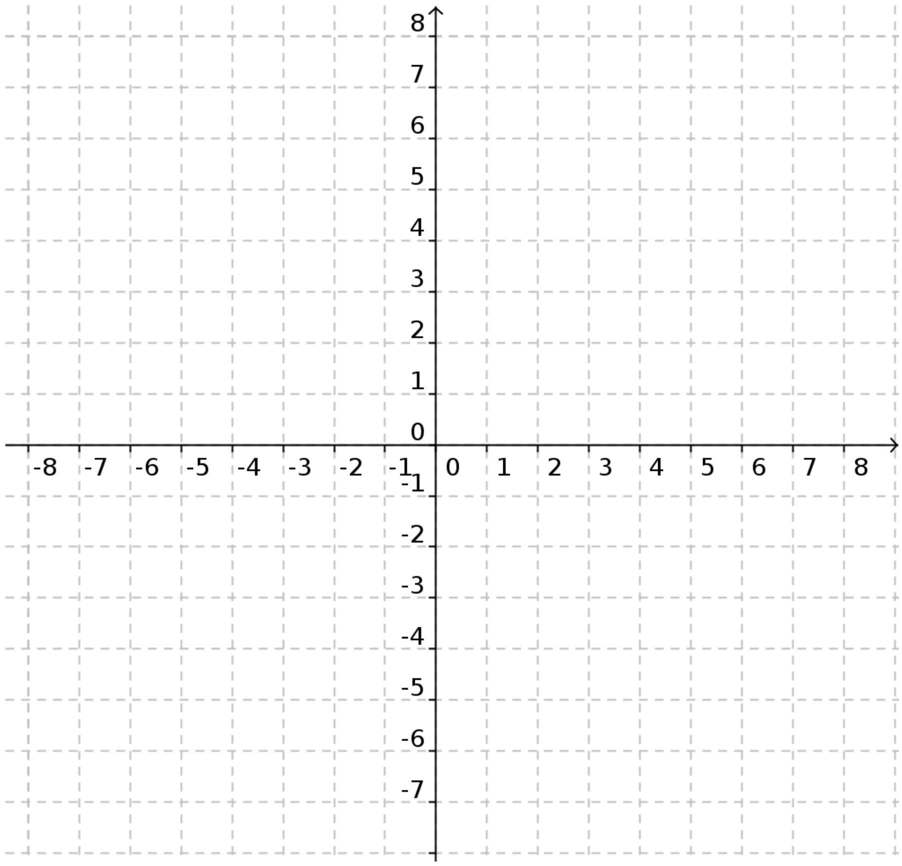
Plus précisément,

pour f, $y = x^3$ et

pour g, $y = \sqrt[3]{x}$ et donc $y^3 = x$ ou encore $x = y^3$.

Ainsi, entre f et g, x et y ont été permutés.

Représentons ces deux fonctions sur un même graphique.



Nous observons une symétrie par rapport à

Cette symétrie applique justement l'axe des abscisses (x) sur l'axe des ordonnées (y) **et** l'axe des ordonnées sur l'axe des abscisses.

On dit que g est la **réciproque** de f (et que f est la réciproque de g)

Carré et racine carrée

Observons la fonction « carré » définie par $f(x) = x^2$ et la fonction « radical » définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Ces fonctions sont en quelque sorte le contraire l'une de l'autre.

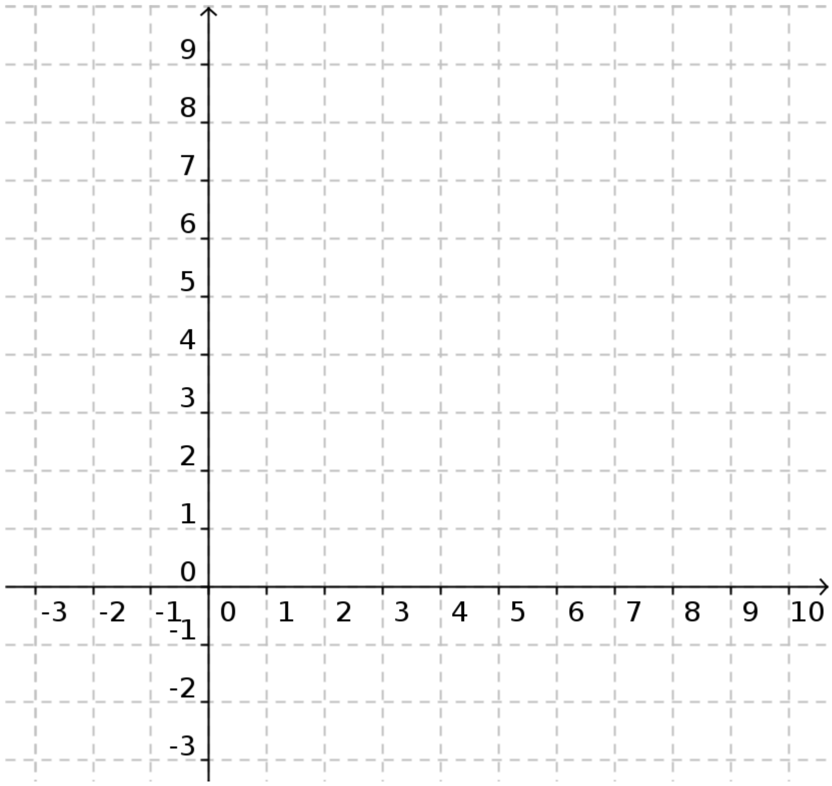
Plus précisément,

pour f, $y = x^2$ et

pour g, $y = \sqrt{x}$ et donc $y^2 = x$ ou encore $x = y^2$.

Ainsi, entre f et g, x et y ont été permutés.

Représentons ces deux fonctions sur un même graphique.



La symétrie fonctionne moins bien ! Il manque un « morceau ».

Pourquoi ?

Que faudrait-il ajouter ?

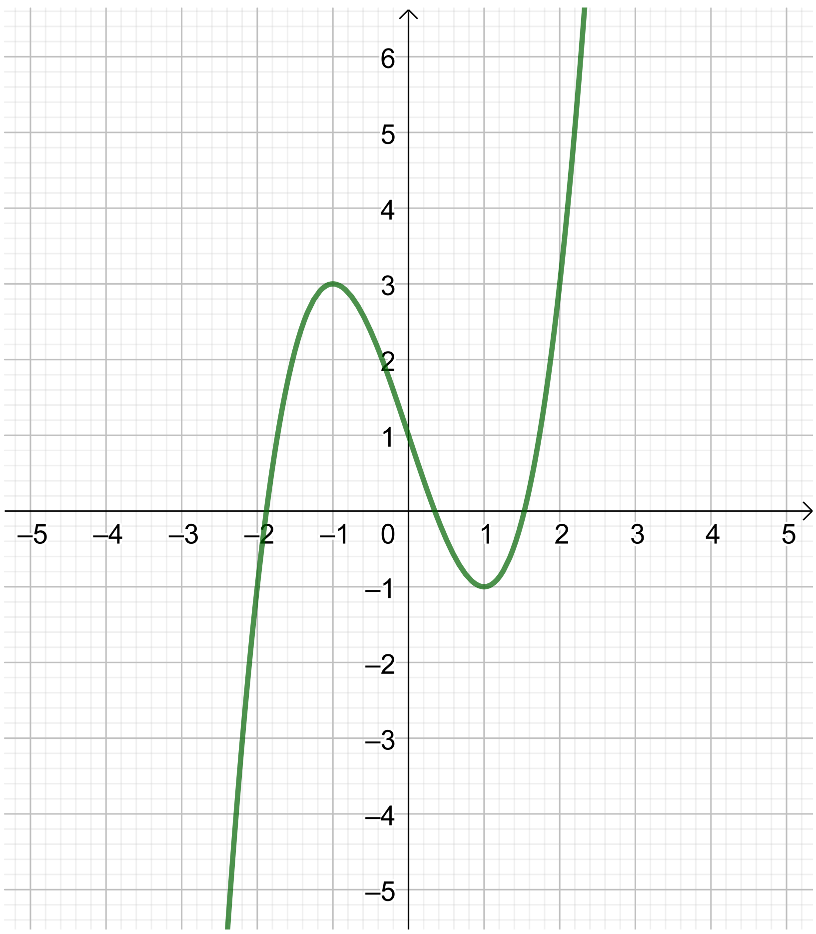
La réciproque de f est-elle une fonction ?

2.5 Transformées de fonctions de référence

Il est parfois possible d'éviter la construction point par point du graphique d'une fonction et de l'obtenir en transformant une fonction f déjà connue.

Transformation de f	Exemple avec $f(x) = \sqrt{x}$
h tel que h(x)=-f(x)	$h(x) = -\sqrt{x}$
i tel que i(x)=f(-x)	$i(x) = \sqrt{-x}$
j tel que j(x)=f(x)+p	$j(x) = \sqrt{x} + 2$
k tel que k(x)=f(x+p)	$k(x) = \sqrt{x+2}$
l tel que l(x)=p.f(x)	$l(x) = 2.\sqrt{x}$
m tel que m(x)=f(p.x)	$m(x) = \sqrt{2x}$

A la fonction f que voici, nous allons appliquer ces 6 transformations.



Comment construire le graphique de $h\left(x\right)=-f\left(x\right)$?

On opère une

par rapport à

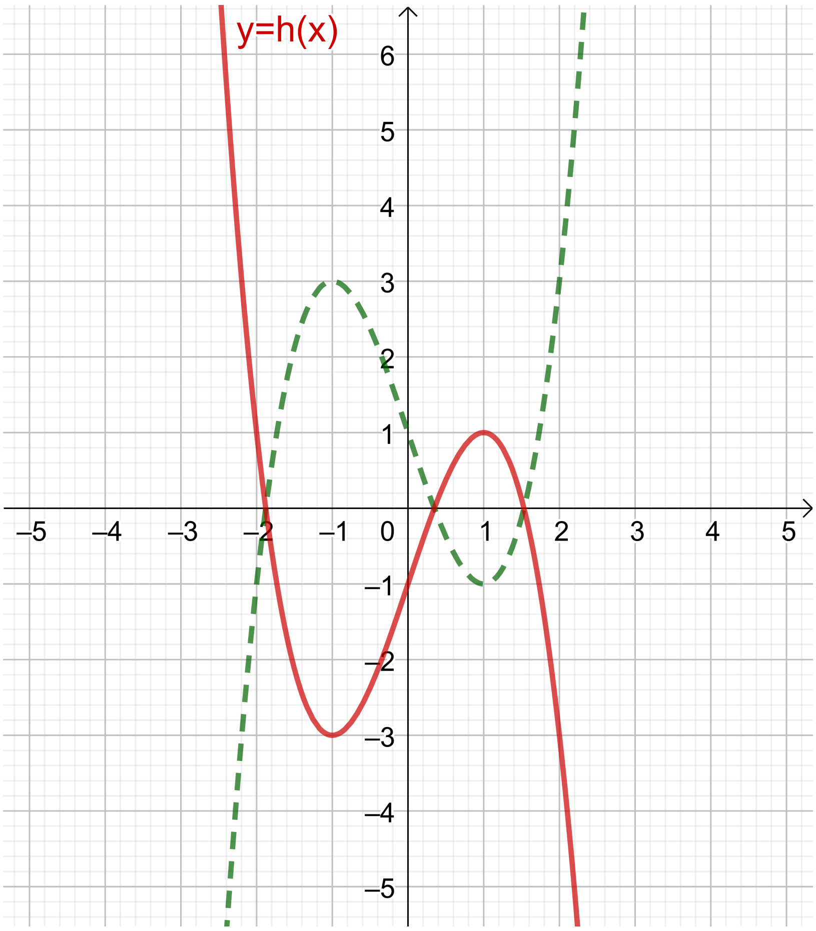
Que sont devenus les points suivants ?

$(-1;3)\rightarrow$

$(0;1)\rightarrow$

$(1;-1)\rightarrow$

$(x;y)\rightarrow(x;-y)$



Comment construire le graphique de $i\left(x\right)=f\left(-x\right)$?

On opère une

par rapport à

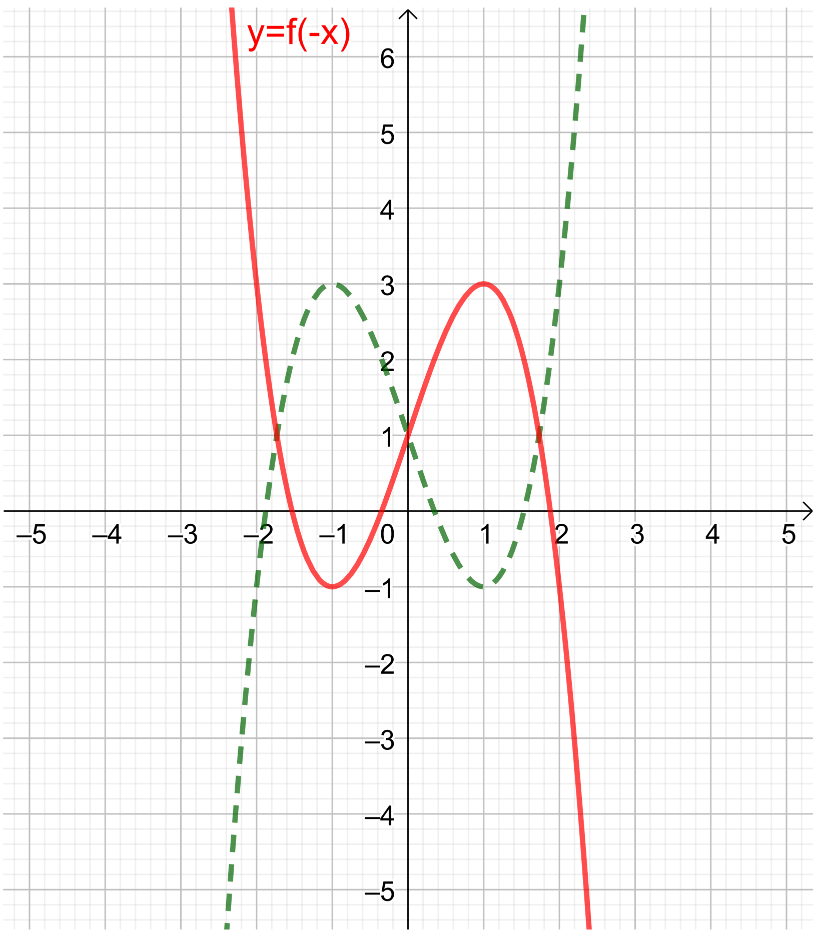
Que sont devenus les points suivants ?

$(-1;3)\rightarrow$

$(0;1)\rightarrow$

$(1;-1)\rightarrow$

$(x;y)\rightarrow(-x;y)$



Comment construire le graphique de $j(x) = f(x) + p$?

On opère une

de unités

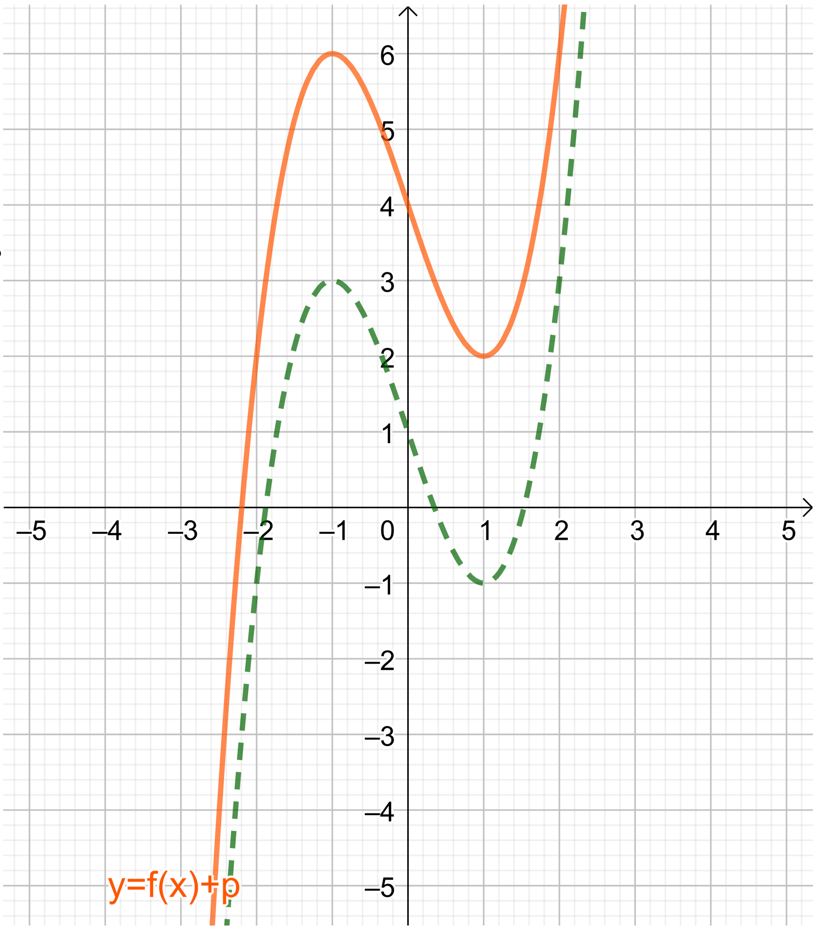
Que sont devenus les points suivants (p=3) ?

$(-1;3) \rightarrow$

$(0;1) \rightarrow$

$(1;-1) \rightarrow$

$(x;y) \rightarrow (x;y+p)$



p=3

$(x;y) \rightarrow (x;y+3)$

Comment construire le graphique de $k(x) = f(x+2)$?

Pour t'aider, remplis le tableau suivant.

x	x+2	f(x+2)
		3
		1
		-1

Comment construire le graphique de $k(x) = f(x+p)$?

On opère une

de unités

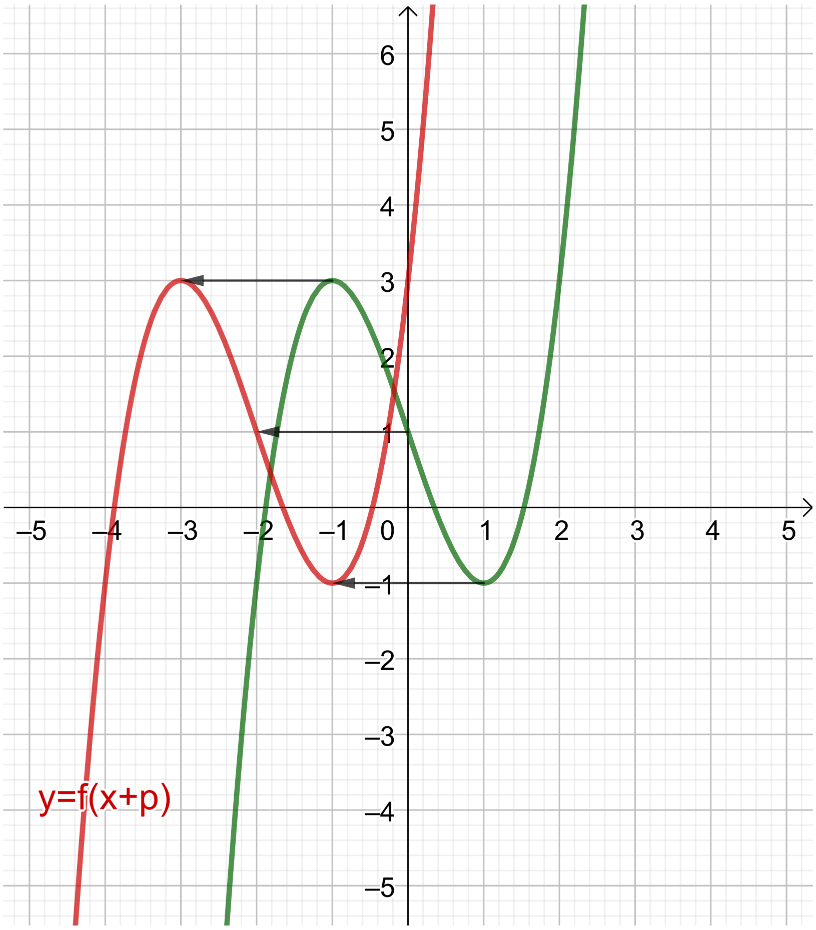
Que sont devenus les points suivants (p=2) ?

$(-1;3) \rightarrow$

$(0;1) \rightarrow$

$(1;-1) \rightarrow$

$(x;y) \rightarrow (x-p;y)$



p=2

$(x;y) \rightarrow (x-2;y)$

Comment construire le graphique de $l(x) = p.f(x)$ (p>0) ?

On opère une

de coefficient

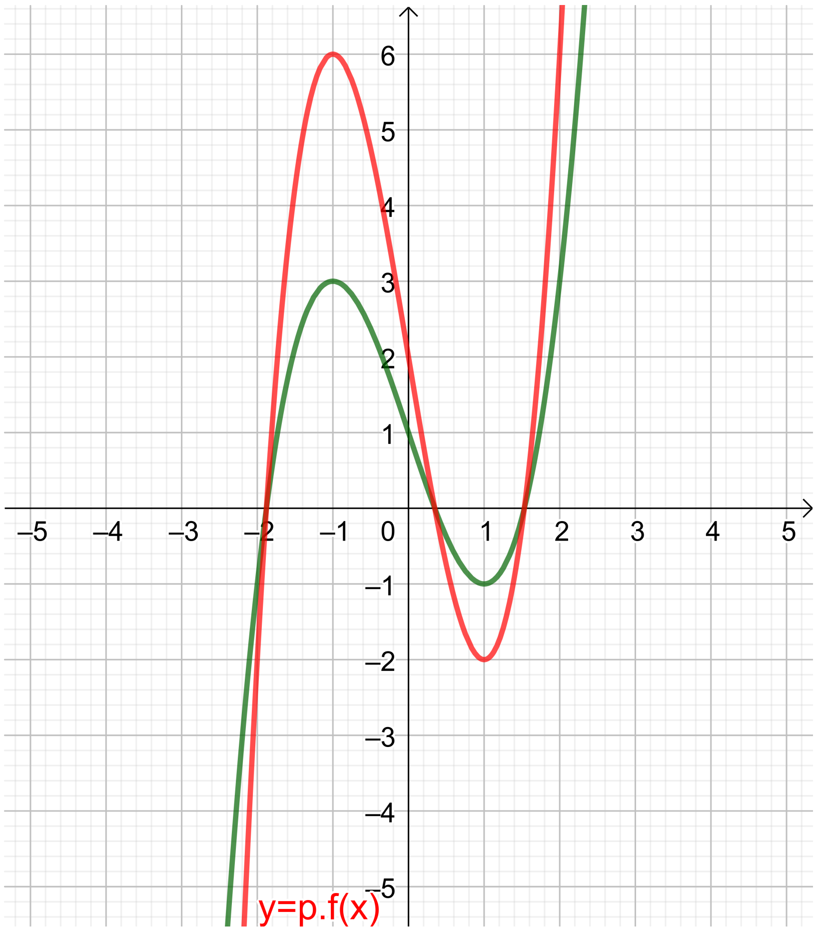
Que sont devenus les points suivants (p=2) ?

$(-1; 3) \to$

$(0; 1) \to$

$(1; -1) \to$

$(x; y) \to (x; p.y)$



p=2

$(x; y) \to (x; 2y)$

Comment construire le graphique de $m(x) = f(2x)$?

Pour t'aider, remplis le tableau suivant.

x	2x	f(2x)
		3
		1
		-1

2

Comment construire le graphique de $m(x) = f(p.x)$ (p>0) ?

On opère une

de coefficient

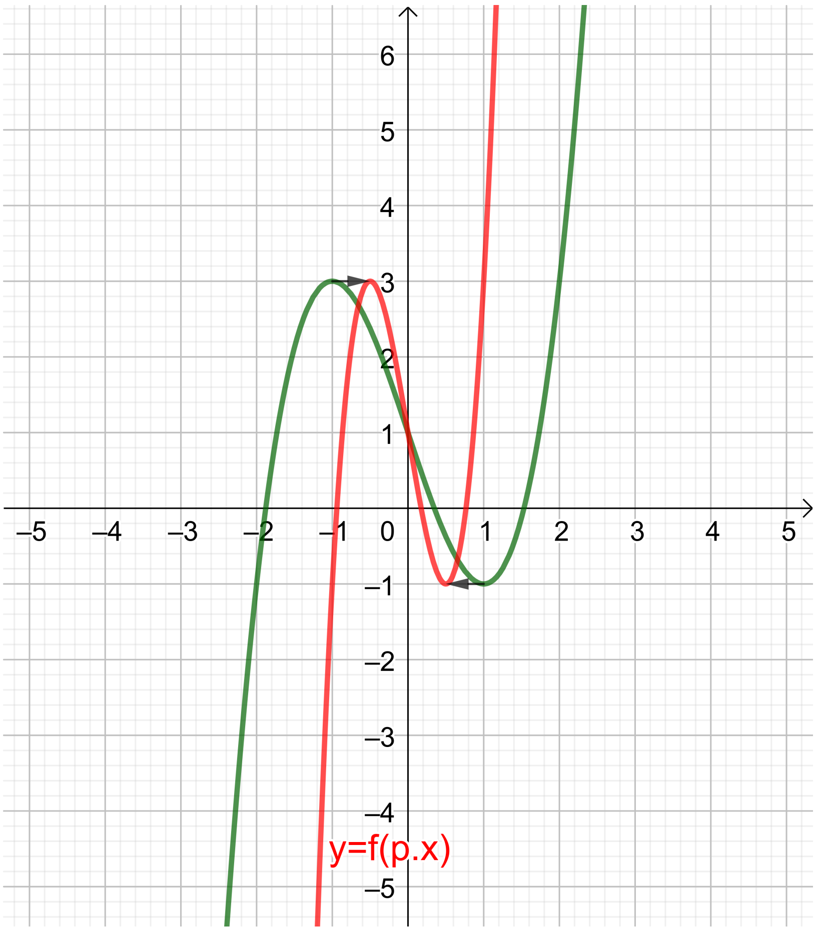
Que sont devenus les points suivants (p=2) ?

$(-1;3) \rightarrow$

$(0;1) \rightarrow$

$(1;-1) \rightarrow$

$$(x;y) \rightarrow \left(\frac{x}{p};y\right)$$



p=2

$$(x;y) \rightarrow \left(\frac{x}{2};y\right)$$

Exercices

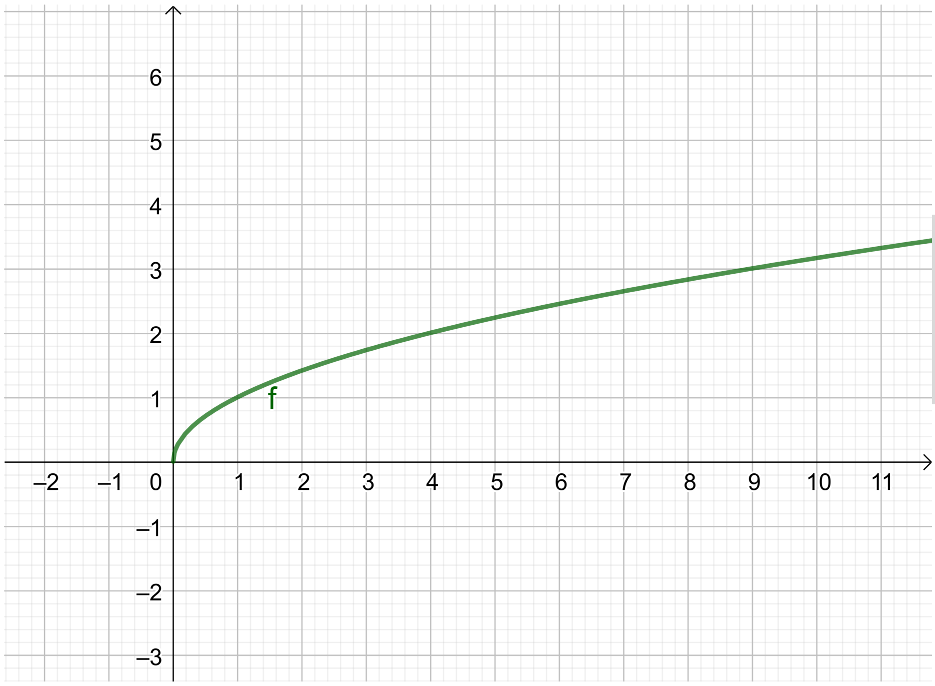
1. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, exprime avec $f(x)$:
   (a) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 2$
   (b) $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$
   (c) $i(x) = -\sqrt[3]{2x}$
   (d) $j(x) = 5.\sqrt[3]{x} - 3$
2. A partir de la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x}$,
   (a) construis le graphe des fonctions suivantes.
   (b) Précise dans chaque cas la transformation effectuée. Utilise des couleurs.

1) $g(x) = \sqrt{x} - 1$

2) $h(x) = \sqrt{x+2}$

3) $i(x) = 2.\sqrt{x}$

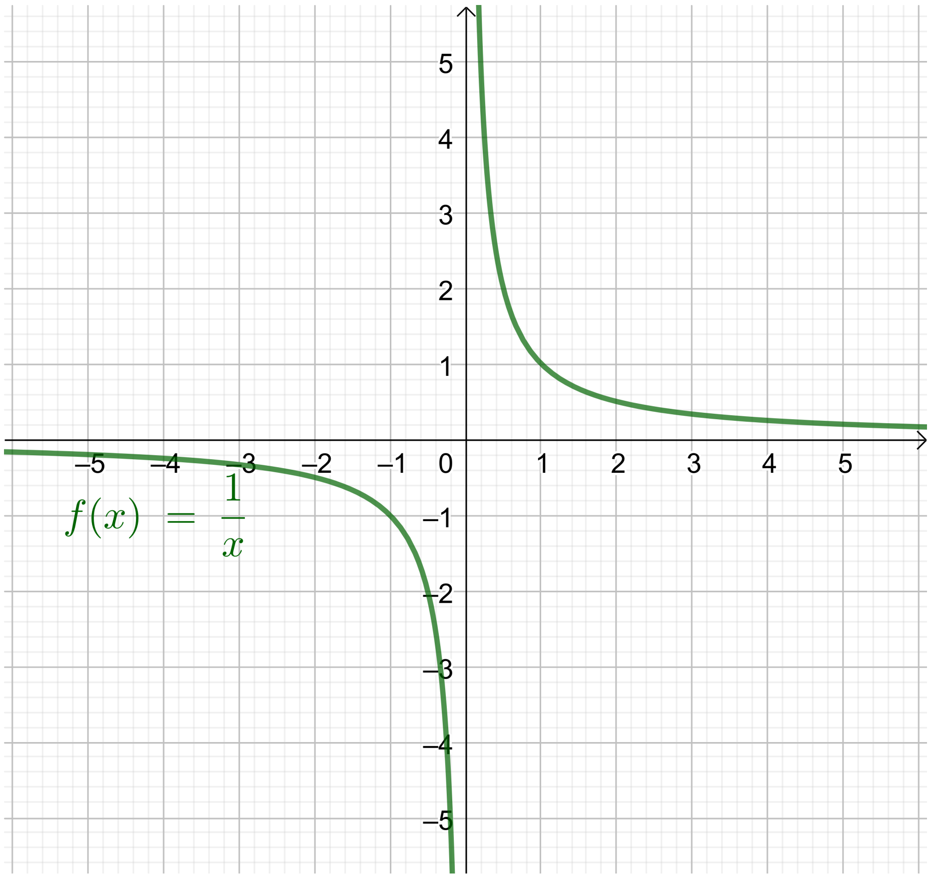
4) $j(x) = -\sqrt{x}$



3. En partant de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(a) cite les transformations du plan et les transformations des coordonnées
qui permettent de passer au graphe de $g(x) = \dfrac{1}{x+2} + 1$.

(b) Trace le graphe de g.



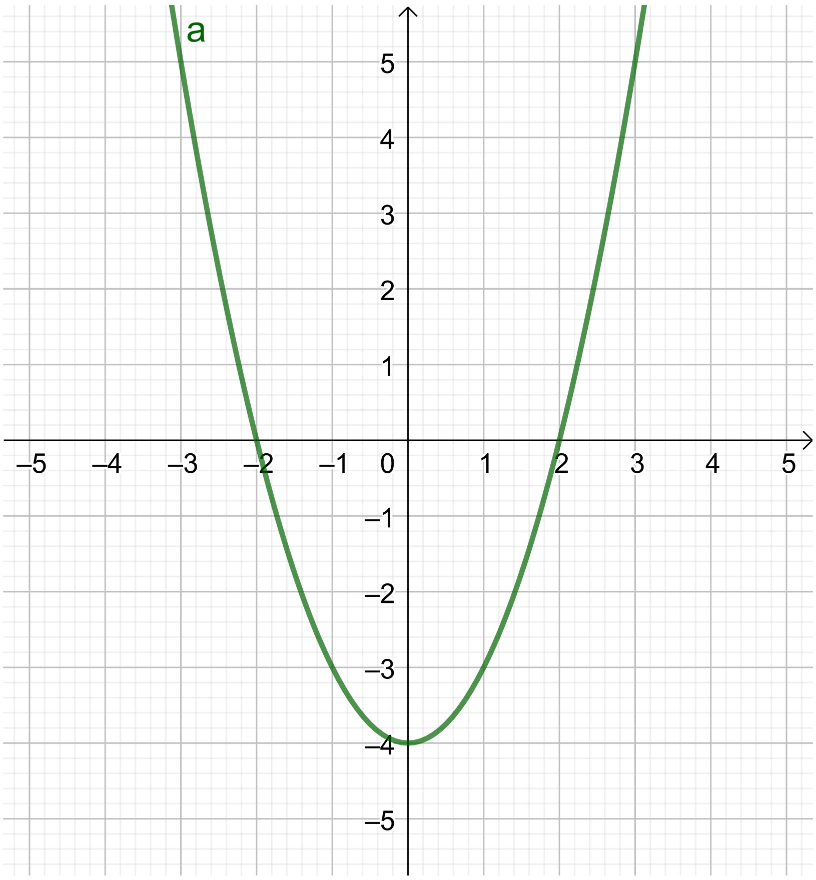
4. Chacune des fonctions suivantes a un graphe cartésien qui est obtenu en transformant celui d'une fonction de référence.

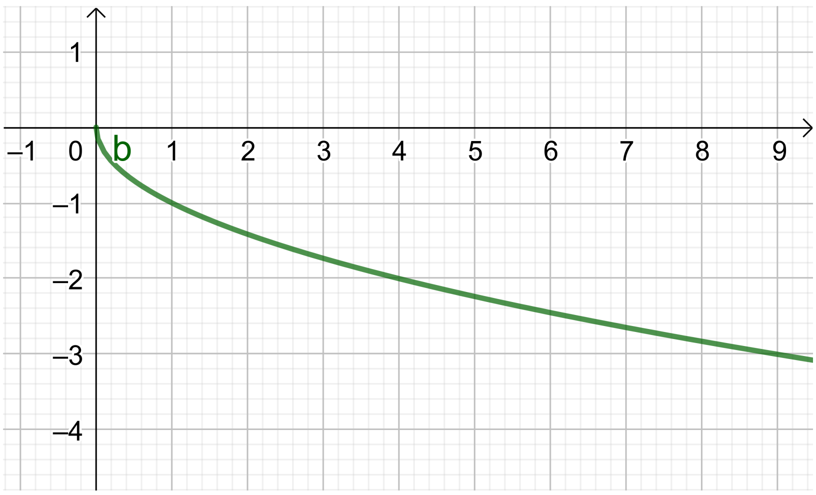
   (a) Retrouve la fonction de référence dont est issu le graphe.

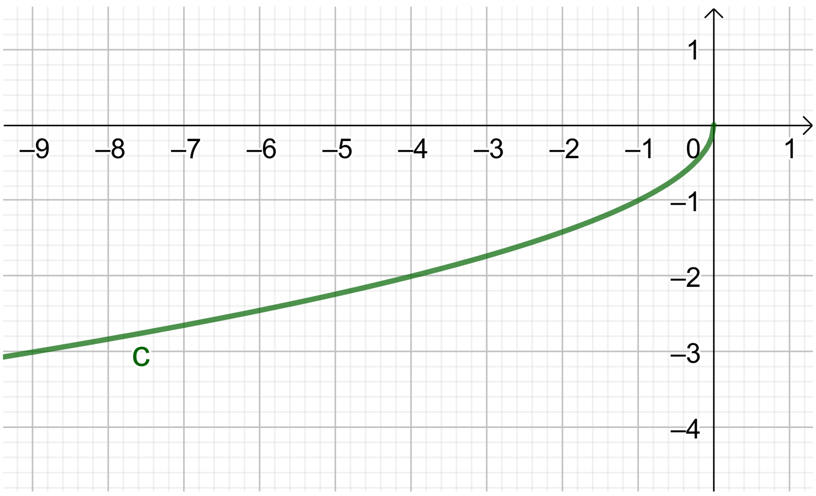
   (b) Précise la transformation qui a permis de l'obtenir.

   (c) Donne la transformation des coordonnées.

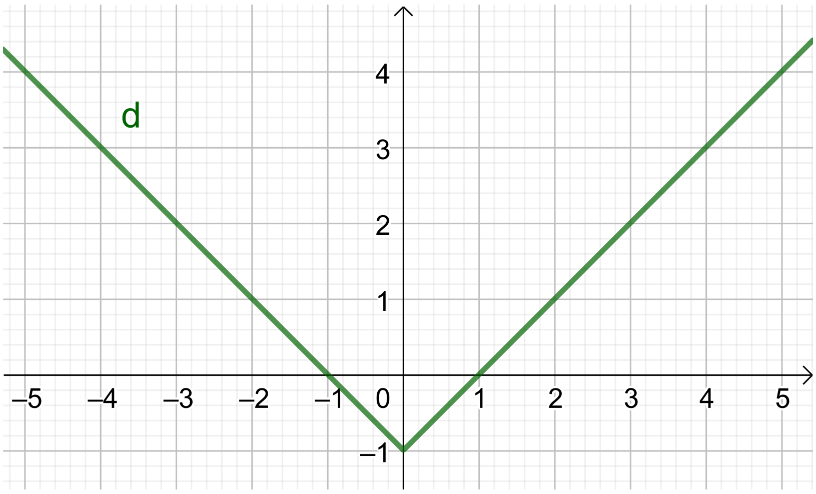
   (d) Trouve la formule de la fonction dessinée.

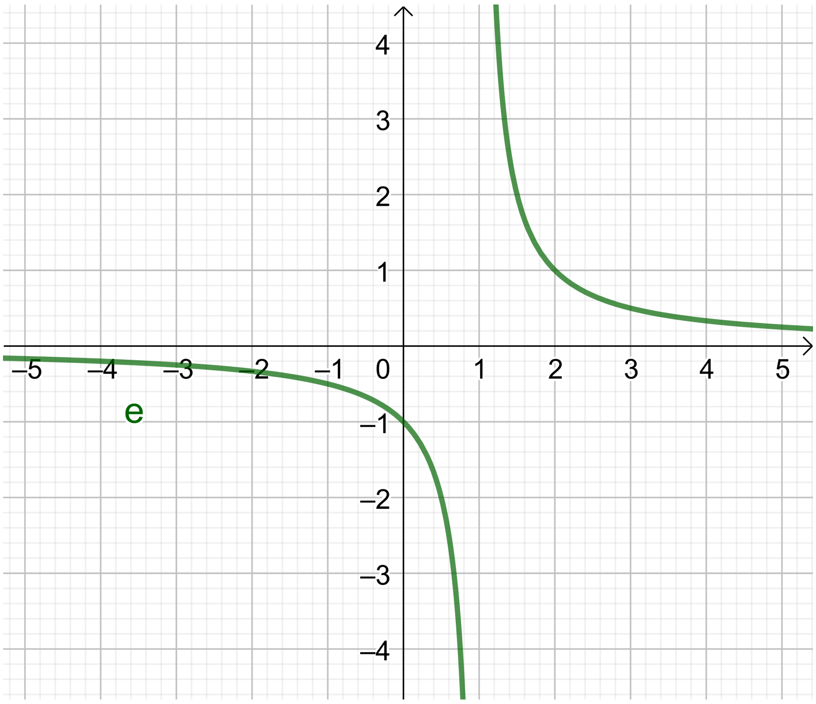


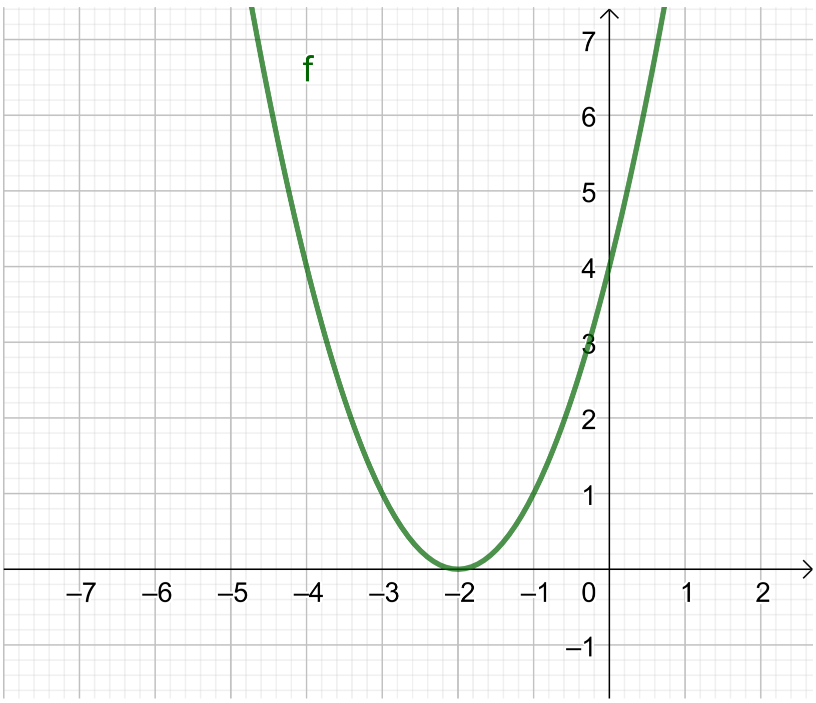


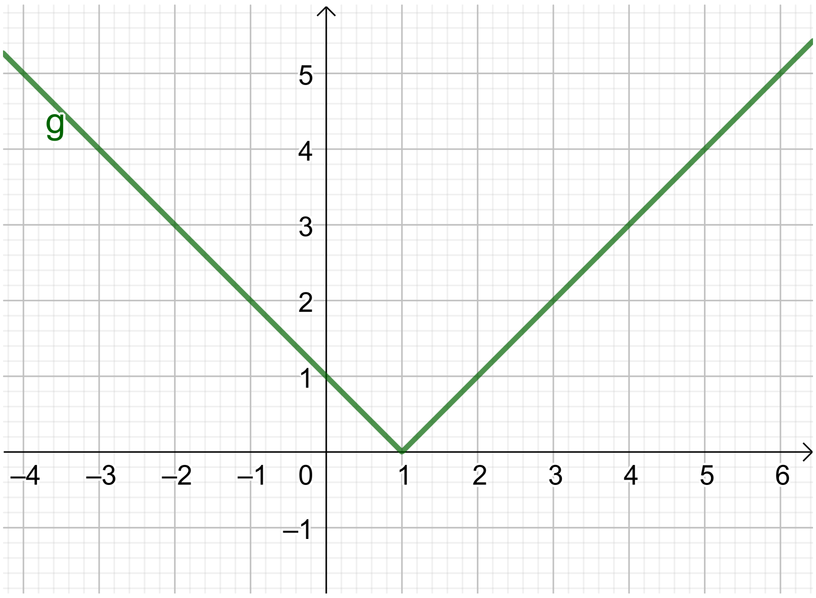


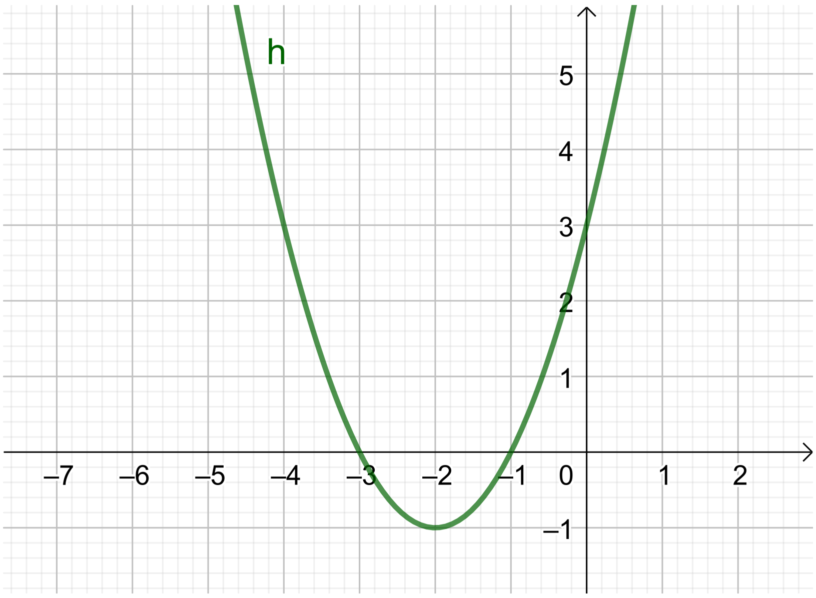
2

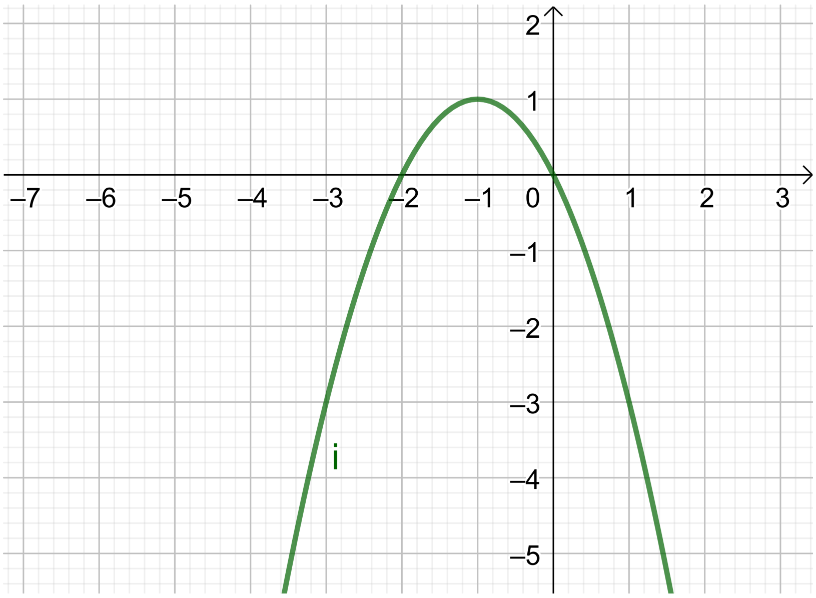

d
4
3
2
1
–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5
–1

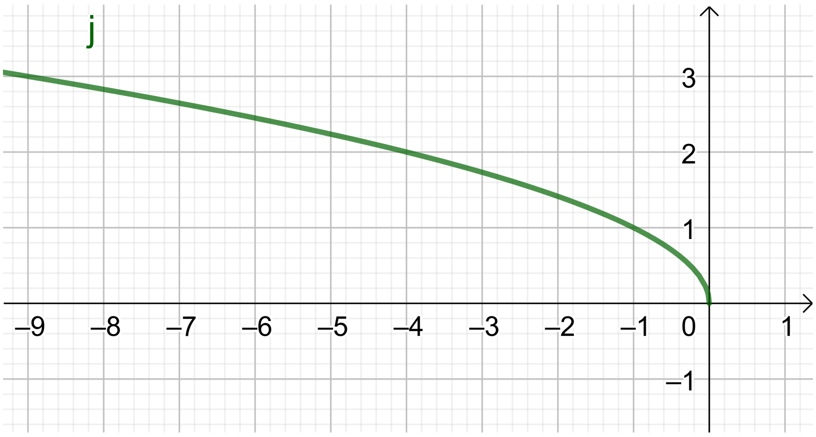

4
3
2
1
–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5
e
–1
–2
–3
–4

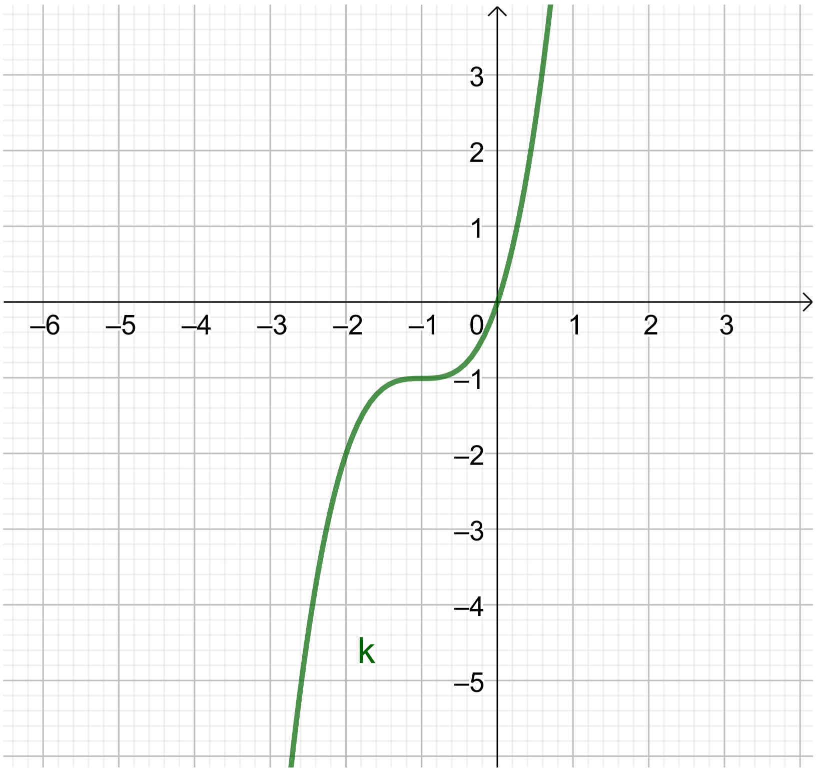

f
7
6
5
4
3
2
1
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2
–1


g
5
4
3
2
1
–4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6
–1


h
5
4
3
2
1
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2
–1


2
1
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3
–1
–2
–3
i
–4
–5





5. Partant de $f(x) = x^2$, écris :

(a) $4.f(x)$

(b) $f(-x)$

(c) $f(x+7)$

(d) $f(x-2)$

(e) $f(x)-1$

(f) $-f(x)$

(g) $f(2x)$

6. Cite les transformations (du plan et des coordonnées) qui permettent de passer du graphe de $f : x \to x^2$ au graphe de :
   (a) $g(x) = x^2 + 5$
   (b) $h(x) = 5x^2$
   (c) $i(x) = (x-3)^2$
   (d) $j(x) = (x+1)^2 + 2$
   (e) $k(x) = -x^2$
   (f) $l(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^2$
   (g) $m(x) = \frac{x^2}{7}$
   (h) $n(x) = -(2x)^2 + 3$

2

2.6 Transformées de x²

Première série

1. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = (x+2)^2$.
   (a) Donne la transformation qui fait passer de f à g.
   (b) Donne la transformation des coordonnées.
   (c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.
2. Partant de $g(x) = (x+2)^2$, passe à i tel que $i(x) = 2(x+2)^2$.
   (d) Donne la transformation qui fait passer de g à i.
   (e) Donne la transformation des coordonnées.
   (f) Trace la fonction i sur le même graphique que la fonction g ci-dessus.
3. Partant de $g(x) = (x+2)^2$, passe à j tel que $j(x) = -(x+2)^2$.
   (g) Donne la transformation qui fait passer de g à j.
   (h) Donne la transformation des coordonnées.
   (i) Trace la fonction j sur le même graphique aussi que la fonction g ci-dessus.

4. Partant de $f(x) = x^2$, passe à h tel que $h(x) = (x-3)^2$.
   (a) Donne la transformation qui fait passer de f à h.
   (b) Donne la transformation des coordonnées.
   (c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.
5. Partant de $h(x) = (x-3)^2$, passe à k tel que $k(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$.
   (a) Donne la transformation qui fait passer de h à k.
   (b) Donne la transformation des coordonnées.
   (c) Trace la fonction k sur le même graphique que la fonction h ci-dessus.
6. Partant de $h(x) = (x-3)^2$, passe à l tel que $l(x) = -2(x-3)^2$.
   (a) Donne la transformation qui fait passer de h à l.
   (b) Donne la transformation des coordonnées.
   (c) Trace la fonction l sur le même graphique aussi que la fonction h ci-dessus.

Deuxième série

7. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = 2(x+3)^2$.
   (a) Donne les transformations qui font passer de f à g.
   (b) Donne la transformation des coordonnées.
   (c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.
8. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = 2(x-2)^2$.
   (a) Donne les transformations qui font passer de f à g.
   (b) Donne la transformation des coordonnées.
   (c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.
9. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$.
   (a) Donne les transformations qui font passer de f à g.
   (b) Donne la transformation des coordonnées.

(c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.

10. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = -2(x-1)^2$.

   (a) Donne les transformations qui font passer de f à g.

   (b) Donne la transformation des coordonnées.

   (c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.

11. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = -\dfrac{1}{2}(x+3)^2$.

   (a) Donne les transformations qui font passer de f à g.

   (b) Donne la transformation des coordonnées.

   (c) Trace les deux fonctions sur le même graphique.

Chapitre 3

Statistique

Table des matières

Objectifs

CONNAÎTRE

• Expliquer le vocabulaire statistique.

• Identifier les différents types de caractères statistiques et décrire les informations graphiques et numériques qui peuvent y être associées.

• Expliquer pour quels usages sont requis les indicateurs de position (valeur centrale) ou de dispersion.

• Expliquer la relation sur les coefficients multiplicateurs (produit, inverse).

APPLIQUER

• Utiliser les proportions, pourcentages d'une sous-population dans une population.

• Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages.

• Calculer ou estimer les indicateurs de position et de dispersion et les positionner sur un graphique.

• Lire et comprendre une fonction renvoyant une moyenne, un écart type.

• Construire différents graphiques statistiques.

• Extraire une information de graphiques et de tableaux statistiques.

• Construire l'évolution : variation absolue, variation relative. Évolutions successives, évolution réciproque.

• Utiliser l'inégalité de Tchebychev ou la proportion d'éléments appartenant à $[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma]$.

• Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution. Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs.

• Calculer un taux d'évolution réciproque.

TRANSFÉRER

• Choisir un support graphique, une valeur centrale, un indice de dispersion pour étudier une situation.

• Critiquer des informations graphiques, numériques, textuelles, ...

• Commenter des informations fournies sur un même sujet par différents supports.

• Décrire les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.

• Interpréter un résultat obtenu en lien avec le caractère étudié et le contexte.

En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'une calculette avec mode STAT, d'un ordinateur avec LibreOffice (Calc) ou d'un smartphone avec Google Sheets.

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/statistique

3.0 Prérequis

La moyenne de 3, 5, 10 et -6 est	16	5	0	3	6
La moyenne de 0, 2, 7 et -9 est	16	5	0	3	6
La moyenne de 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7 et 7 est	16	5	0	3	6
Le calcul $\frac{3.3+7.5+8.8}{18}$ donne	16	5	0	3	6

3.1 Tableau brut - tableau ordonné

Incursion

La statistique étudie les ensembles étendus de mesures.
Étendus comment ?
Ta taille (en cm) et celle de tes voisins, ce n'est pas très étendu. Celle de tous les élèves de ta classe, ça commence à être étendu. Celle de tous les élèves de ton année, c'est encore mieux.
Tu peux dire « les » statistiques.

Écris la taille de tous tes condisciples, sans leurs noms, par discrétion !

Le résultat est un tableau brut, très brut même, puisque ce n'est même pas un tableau.

C'est le résultat d'une (rapide) enquête, noté sur le vif.

Il y a trop de mesures pour les considérer individuellement.

L'objet de la statistique descriptive est de représenter sous forme de graphiques et de résumer à l'aide de quelques nombres significatifs les informations disponibles.

Ce résumé entraînera donc une perte d'information.

Avant de faire un graphique ou une moyenne avec les tailles de tes condisciples, il faut y mettre un peu d'ordre.

L'ensemble des élèves concernés s'appelle la population.

S'il y a des absents le jour du recensement des tailles, on dit qu'ils ne font pas partie de l'échantillon.

Si l'on mesurait la masse des colis postaux au départ du centre X, on parlerait aussi de population.

Chaque élément de la population est un individu.

Tableau ordonné

Dans ma population, il y a 80 élèves qui mesurent entre 150 cm et 177 cm.
Comment présenter cela dans un tableau ?
Pour être facile à lire et aussi assez détaillé, ce tableau devrait comprendre une dizaine de lignes.
177-150=27, cela se divise par 9. C'est parfait !

Classe	centre	effectif	fréquence	Effectif cumulé	Fréquence cumulée
$[150;153[$	151	6	$7,5\%$	6	
$[153;156[$	154	7	$8,75\%$	13	
$[156;159[$	157	6	$7,5\%$	19	
$[159;162[$	160	8			
$[162;165[$	163	10			
$[165;168[$	166	16			
$[168;171[$	169	12			
$[171;174[$	172	8			
$[174;177]$	175	7			
Total		80			

Remarque que les classes ont été choisies de sorte que chaque modalité appartienne à une et une seule classe.

Comme un de mes élèves mesure 177 cm, j'ai fermé le dernier intervalle.

Les centres de classe ont été choisis de manière pratique.

Le statisticien fait des synthèses, il y a donc perte d'information. De toutes façons, aucun élève de ma classe ne mesure 151,5 cm ! Le fait d'attribuer 151 comme centre de la première classe signifie que l'on considère que les 6 élèves de cette classe mesurent tous 151 cm.

La fréquence d'une classe est obtenue en divisant son effectif par l'effectif total.

Comment obtient-on l'effectif cumulé ?

La fréquence cumulée s'obtient en divisant l'effectif cumulé par l'effectif total.

Deux exemples

Colis postaux

40 colis ont été envoyés par la poste.
Voici leurs masses, en kg.

1,32	1,58	1,65	1,70	1,73	1,76	1,81	1,84	1,91	2,02
1,44	1,59	1,67	1,71	1,73	1,76	1,82	1,85	1,92	2,03
1,46	1,64	1,69	1,71	1,74	1,79	1,83	1,88	1,97	2,09
1,55	1,65	1,69	1,72	1,75	1,80	1,83	1,90	2,00	2,11

Population :

Individu :

Échantillon :

Caractère :

Type de caractère :

Modalités :

Dresse un tableau ordonné comportant 9 classes de même taille avec effectifs, fréquences, effectifs cumulés et fréquences cumulées.

Classes	Centres c_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Effectifs cumulés N_i	Fréquences cumulées F_i
$[1,3;\ 1,4[$	$1,35$	1	$2,5$%	1	$2,5$%
$[1,4;\ 1,5[$	$1,45$	2	5%	3	$7,5$%
		$n =$	Total :		

Dans cet exemple nous avons donc : $n_6 =$ $f_3 =$ $N_9 =$ $F_6 =$

Hauteur de meubles

Résultats de mesures de meubles en cm :

101	99	102	101	99	101	100	100	101	101	99	100	99	100	101	100	101	101	98	101
100	100	101	101	98	100	100	102	101	100	99	97	102	101	100	100	99	101	100	100
99	99	99	99	100	101	101	100	100	100	101	99	100	100	101	101	102	100	101	99
100	100	101	101	99	101	99	99	102	98	100	100	101	101	100	100	99	100	101	101
99	100	100	101	102	101	101	100	100	100	99	100	99	102	101	99	101	100	99	100

Population :

Individu :

Échantillon :

Caractère :

Type de caractère :

Modalités :

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Eff. cumulés N_i	Fréq. cumulées F_i
97				
98				
99				
100				
101				
102				

Exercices

1. Cote d'un contrôle

Voici les cotes sur 10 obtenues au cours d'un contrôle de connaissances par les 112 élèves de $5^{ème}$ année d'une école.

6	8	4	6	5	7	8	5	6	4	8	9	5	8
4	7	4	6	5	7	10	5	6	5	4	8	4	6
9	8	6	8	4	7	7	5	4	5	6	6	6	1
4	8	7	4	4	7	3	5	8	8	4	3	6	5
3	6	4	2	7	6	10	6	7	8	9	6	7	7
5	4	5	6	5	4	9	8	4	2	3	6	2	4
7	7	9	5	7	5	8	2	3	7	4	9	7	6
2	5	6	6	1	3	1	3	5	4	6	10	5	2

Indique la population, un individu, l'échantillon, le caractère,le type de caractère, les modalités.

Dresse ensuite le tableau ordonné.

Donne la valeur de $n_6 =$ $f_3 =$ $N_9 =$ $F_6 =$

2. Taille des jeunes

On étudie la taille des jeunes de 15 à 20 ans en questionnant 657 jeunes et en arrondissant nos résultats au centimètre près.

Vu la taille de l'échantillon et afin d'éviter l'énumération inutile des résultats, un premier tri a déjà été effectué en regroupant les résultats semblables dans le tableau ci-dessous.

Taille	Nombre	Taille	Nombre	Taille	Nombre	Taille	Nombre	Taille	Nombre
151	2	159	10	167	28	175	24	183	6
152	3	160	12	168	39	176	14	184	3
153	6	161	14	169	42	177	20	185	5
154	8	162	15	170	53	178	16	186	5
155	10	163	20	171	38	179	8	187	4
156	10	164	25	172	26	180	15	188	3
157	8	165	28	173	42	181	11	189	2
158	11	166	30	174	30	182	7	190	4

Indique la population, un individu, l'échantillon, le caractère,le type de caractère, les modalités.

Dresse ensuite le tableau ordonné.

Donne la valeur de $C_6 =$ $c_3 =$ $f_8 =$ $F_1 =$

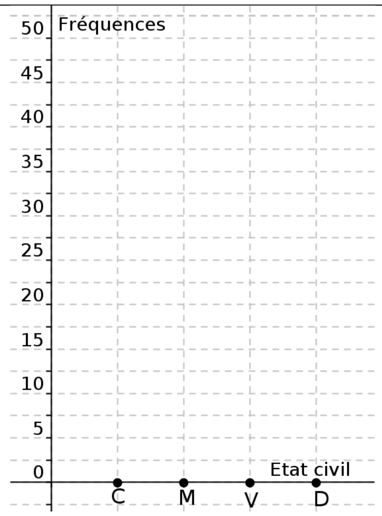
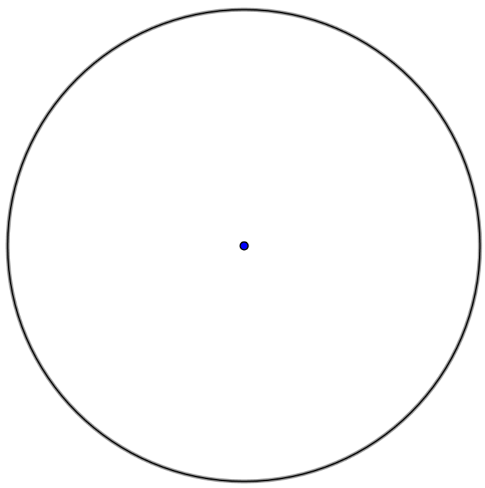
3.2 Diagrammes et graphiques

Caractère qualitatif

Voici l'état civil (Marié, Célibataire, Veuf, Divorcé) de 50 personnes.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i
C	15	30%
M	22	44%
V	8	16%
D	5	10%
	Total : $n = 50$	Total : 100%

Les graphiques privilégiés sont le diagramme en bâtonnets et le diagramme circulaire (camembert).

Diagramme en bâtonnets	Diagramme circulaire
	

Caractère quantitatif

On réalisera généralement un diagramme pour les fréquences (ou effectifs) et un diagramme pour les fréquences cumulées (ou effectifs cumulés).

	Effectifs	Fréquences cumulées
Modalités simples	Diagramme en bâtonnets	Graphique en escalier ou polygone
Classes	Histogramme	Polygone

Exemples

Diagramme en bâtonnets

Reprends le tableau ordonné du premier exercice.

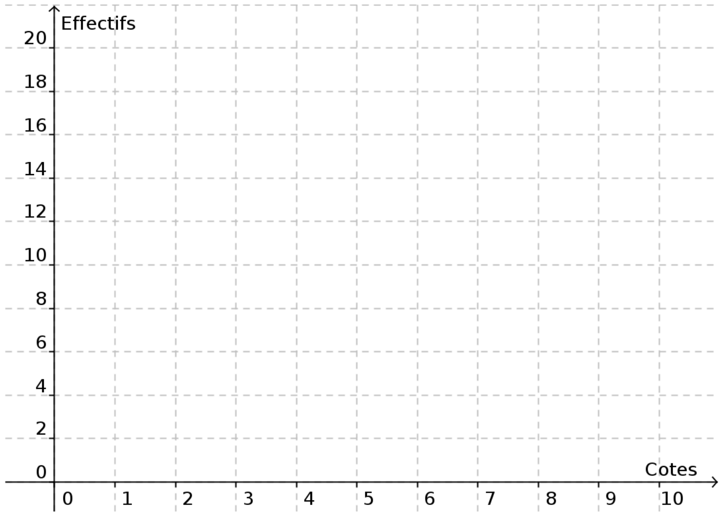
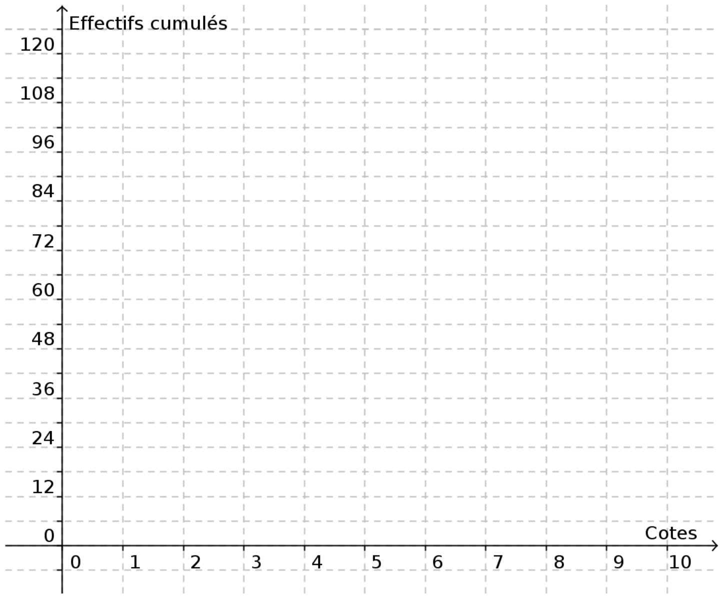


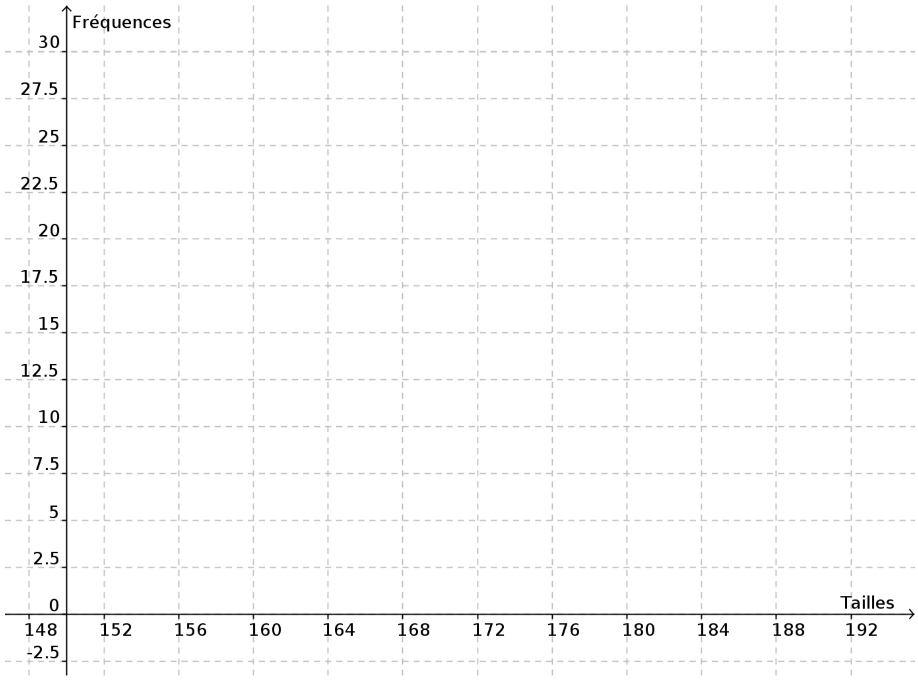
Diagramme en escalier



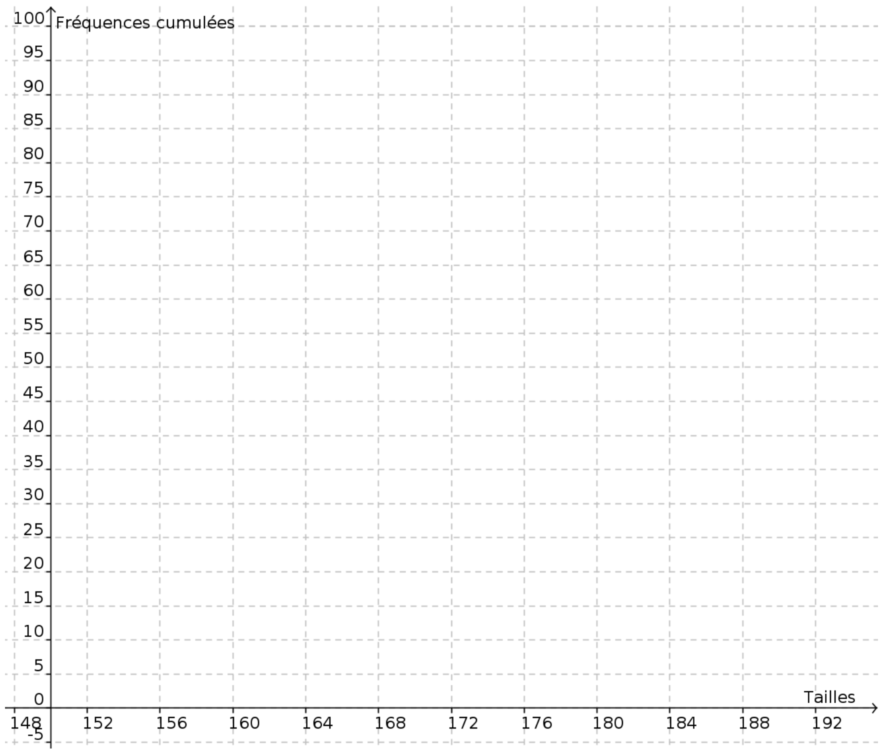
Exemple 2

Reprends le tableau ordonné du deuxième exercice.

Histogramme



Polygone



Pour le polygone des fréquences cumulées, l'abscisse est l'extrémité de la classe.

C'est un choix logique mais conventionnel.

3.3 Indicateurs de position

Le but de la statistique descriptive est d'obtenir un résumé, une synthèse, d'un ensemble étendu de mesures.

Quoi de plus résumé qu'un seul nombre ?

C'est le cas des indicateurs de position.

Un indicateur de position nous donne une idée du centre de la distribution, c'est-à-dire **d'une valeur autour de laquelle** les données sont réparties.

La moyenne vient tout de suite à l'esprit.
Mais il y a plus simple :
le mode
et plus subtil :
la médiane.

Le mode est la modalité la plus fréquente. S'il s'agit d'une classe, on prend son centre.

Le mode peut ne pas être unique.

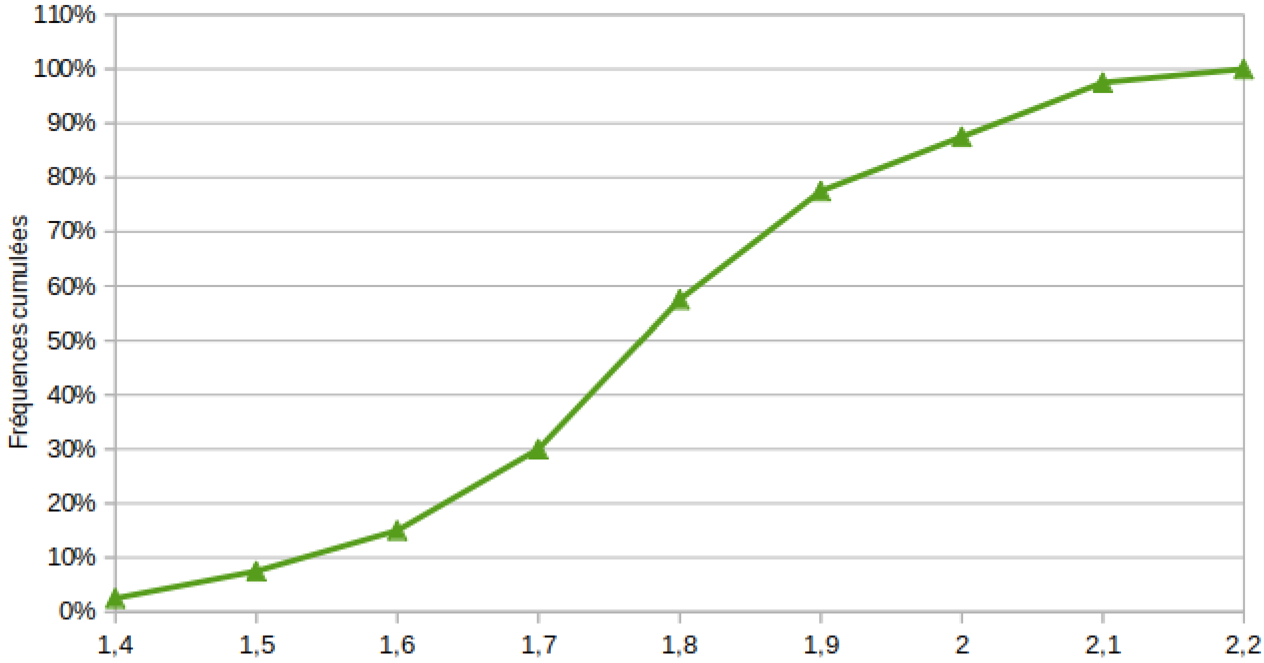
	mode
Taille des élèves	
Colis postaux	
Hauteur des meubles	
Cote d'un contrôle	
Taille des jeunes	
État civil	

La médiane est la modalité telle que la moitié de la population ait une modalité inférieure.

Cela n'a de sens que pour un caractère quantitatif !

Pour la médiane, rien de tel que le polygone des fréquences cumulées.

Pour les colis postaux,



Pratiquement

Prends la droite horizontale $F_i = 50\%$.

Elle rencontre le graphique en un point dont x est... la médiane !

$1,77$ kg environ.

Cela signifie que 50% des colis postaux pèsent moins de 1,77 kg (et 50% pèsent plus).

Un autre exemple

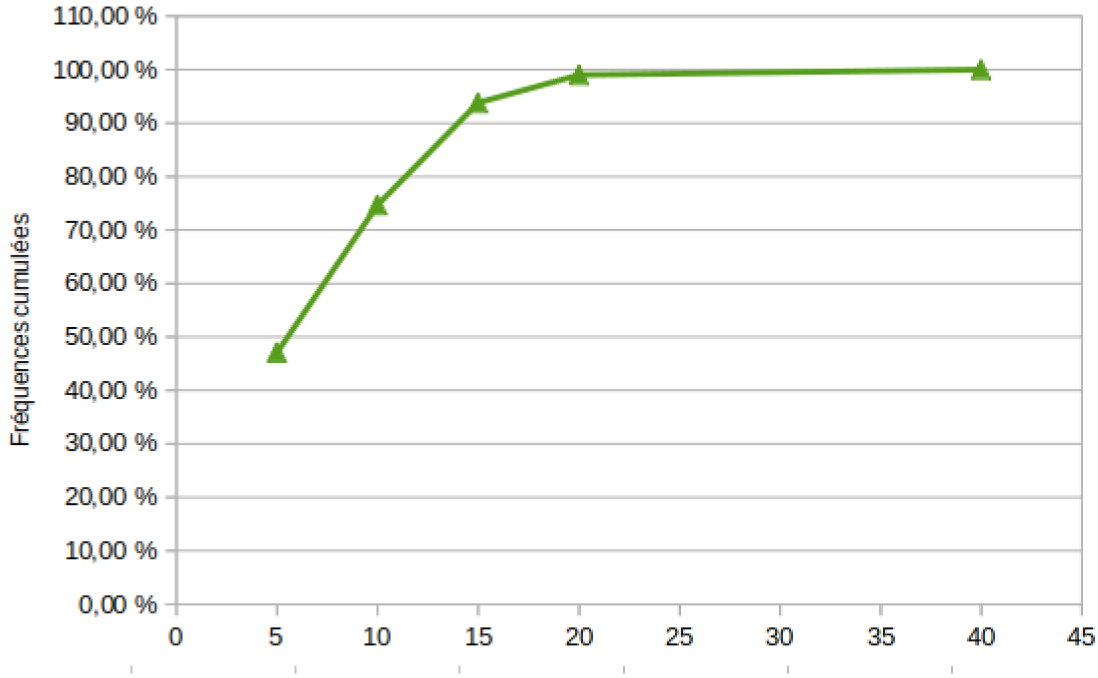
Une étude s'intéresse à la distance (en kilomètres) entre le domicile et l'école pour les 1000 élèves d'une école.

Remarque que près de la moitié des élèves habitent à moins de 5 km.

Seul 1% habite à plus de 20 km. Ils ont été regroupés en une seule classe.

Le tableau nous renseigne déjà sur le fait que la médiane pourrait se situer au début de la classe $]5;10]$ (la première à dépasser 50% en fréquence cumulée).

Classes	Fréquences	Fréquences cumulées
$]0;5]$	47,1%	47,1%
$]5;10]$	27,6%	
$]10;15]$	19,1%	
$]15;20]$	5,2%	
$]20;40]$	1%	100%



Le graphique donne 6,1 km pour la médiane.

Complète le tableau.

	médiane
Taille des élèves	
Colis postaux	
Hauteur des meubles	
Cote d'un contrôle	
Taille des jeunes	

Et la moyenne ?

Vérifie les résultats suivants à l'aide d'un logiciel.

Si tu ne sais pas le faire, lis la section 6.

	moyenne
Taille des élèves	
Colis postaux	**1,78**
Hauteur des meubles	**100,16**
Cote d'un contrôle	**5,6**
Taille des jeunes	**168,9**

En multipliant la moyenne par l'effectif total, on obtient la somme des modalités.

3.4 Indicateurs de dispersion

Un indicateur de position résume une série statistique par un seul nombre. C'est souvent un résumé ... trop résumé !

Par exemple, voici les cotes obtenues (sur 20) à trois contrôles par Sabine et Benoît :

Sabine	9	10	11
Benoît	0	10	20

3

Ces deux séries ont la même moyenne (à savoir 10) et la même médiane (à savoir 10). Cependant, elles diffèrent radicalement ; la seconde série paraît plus dispersée que la première qui semble plus groupée autour des valeurs centrales.

Plus les résultats sont dispersés, plus l'indicateur de dispersion est grand.

A chaque indicateur de position est associé un indicateur de dispersion qui précise comment sont réparties les mesures autour de cette valeur centrale.

Indicateur de position	Indicateur de dispersion
Mode	Étendue
Moyenne	Écart-type
Médiane	Écart inter-quartile

Étendue

La première idée qui vient à l'esprit est la différence entre la plus grande et la plus petite mesure : c'est l'étendue.

Elle n'a de sens que pour un caractère quantitatif.

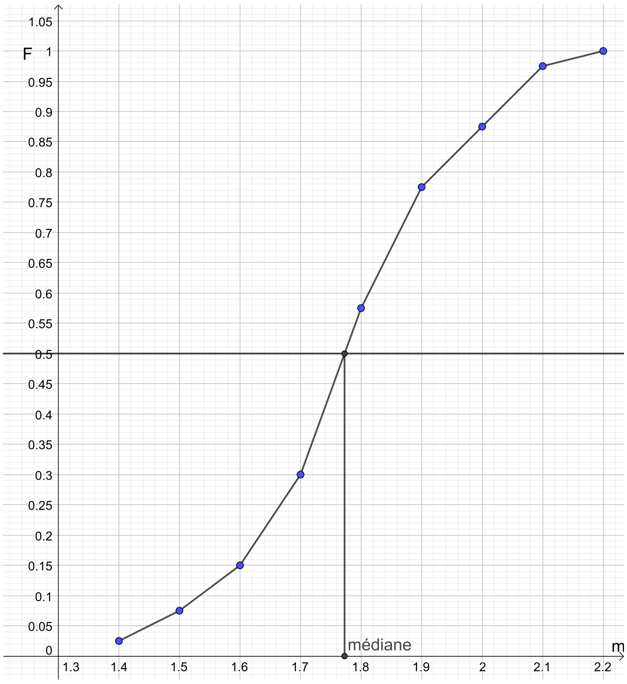
L'étendue est l'indicateur de dispersion associé au mode.

	mode	étendue
Taille des élèves		
Colis postaux	1,75	
Hauteur des meubles	100	
Cote d'un contrôle	6	
Taille des jeunes	168	

Écart inter-quartile

Passons à la médiane.

Reprenons les colis postaux.



La médiane, $1,77$ signifie que 50% des colis postaux pèsent moins de 1,77 kg.

Combien de kg faut-il pour que 25% des colis en pèsent moins ?

Combien de kg faut-il pour que 75% des colis en pèsent moins ?

Ce sont les quartiles Q_1 et Q_3, parfois appelés $Q_{1/4}$ et $Q_{3/4}$.

L'écart-interquartile est la différence des deux.

	médiane	$Q_{1/4}$	$Q_{3/4}$	écart interquartile
Taille des élèves				
Colis postaux	1,77	1,67	1,88	
Hauteur des meubles	99,6			
Cote d'un contrôle	5,3			
Taille des jeunes	166,9			

Remarque

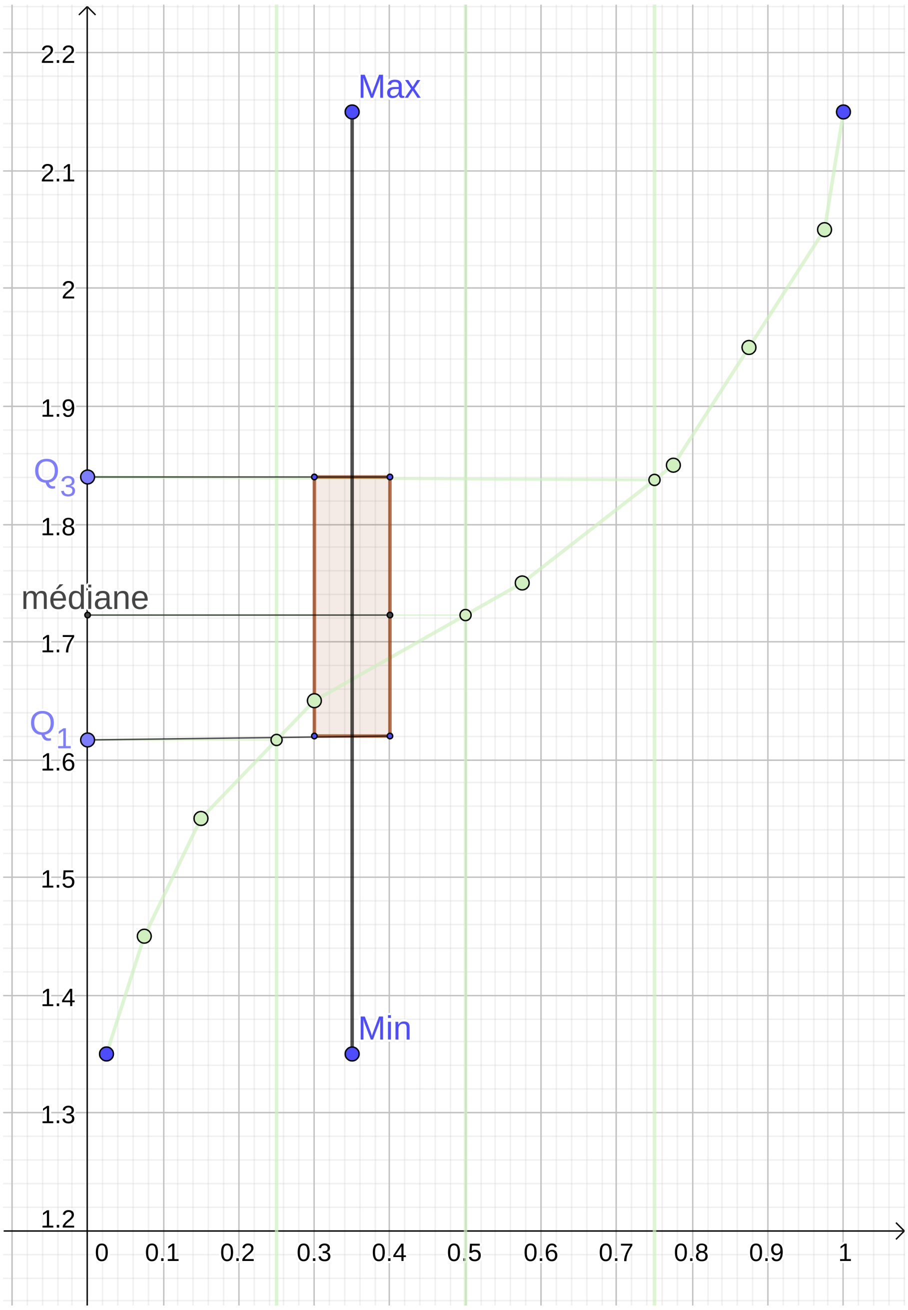
Il faut, bien entendu, un caractère quantitatif.

La boite à moustache (boîte de Tukey ou box plot)

Il s'agit d'un résumé du polygone des fréquences cumulées.

Pour les colis postaux,

elle se construit de la façon suivante :



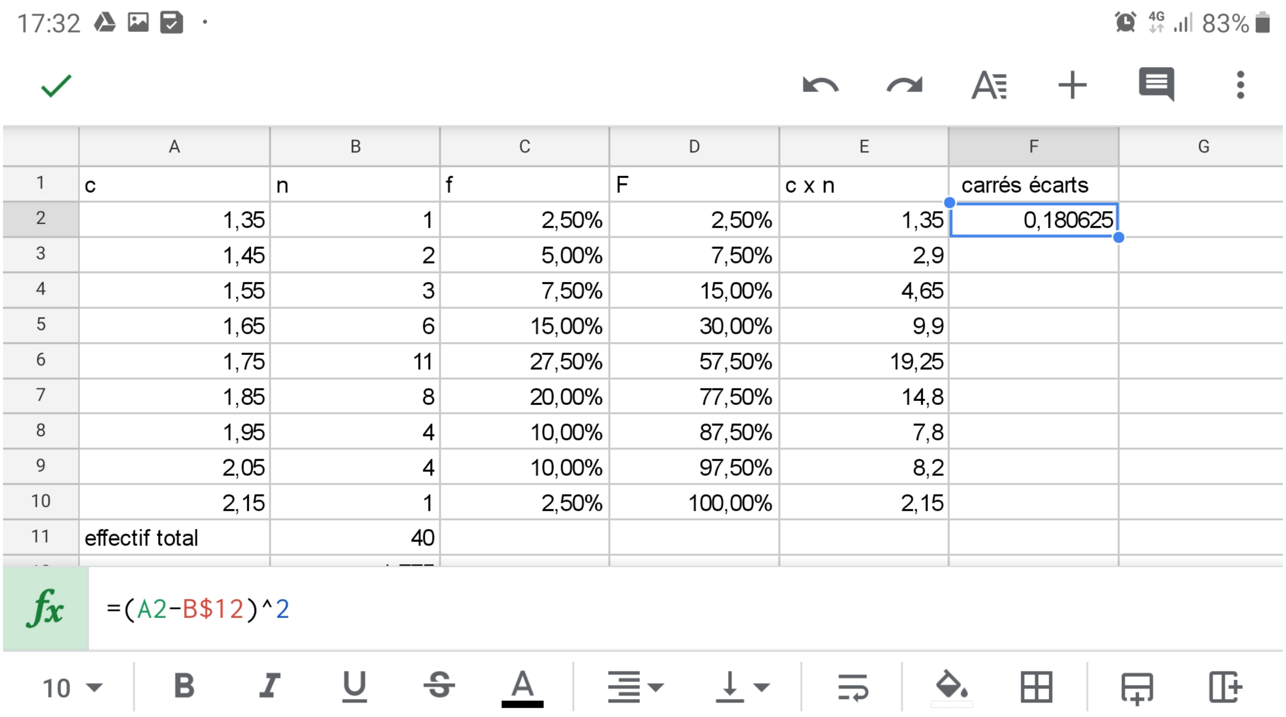
Écart-type

Écarts à la moyenne

Pour associer un paramètre de dispersion à la moyenne $\overline{x}$, nous allons calculer les écarts entre chaque valeur (ou centre de classe) avec la moyenne : $x_i - \overline{x}$.
Si nous en faisons la moyenne : $\frac{n_1.(x_1-\overline{x})+n_2.(x_2-\overline{x})+...+n_p.(x_p-\overline{x})}{n}$, cela donne 0 !
La raison en est qu'il y a des écarts positifs et négatifs, ce qui entraîne des compensations. Ce n'est donc pas un bon paramètre de dispersion.

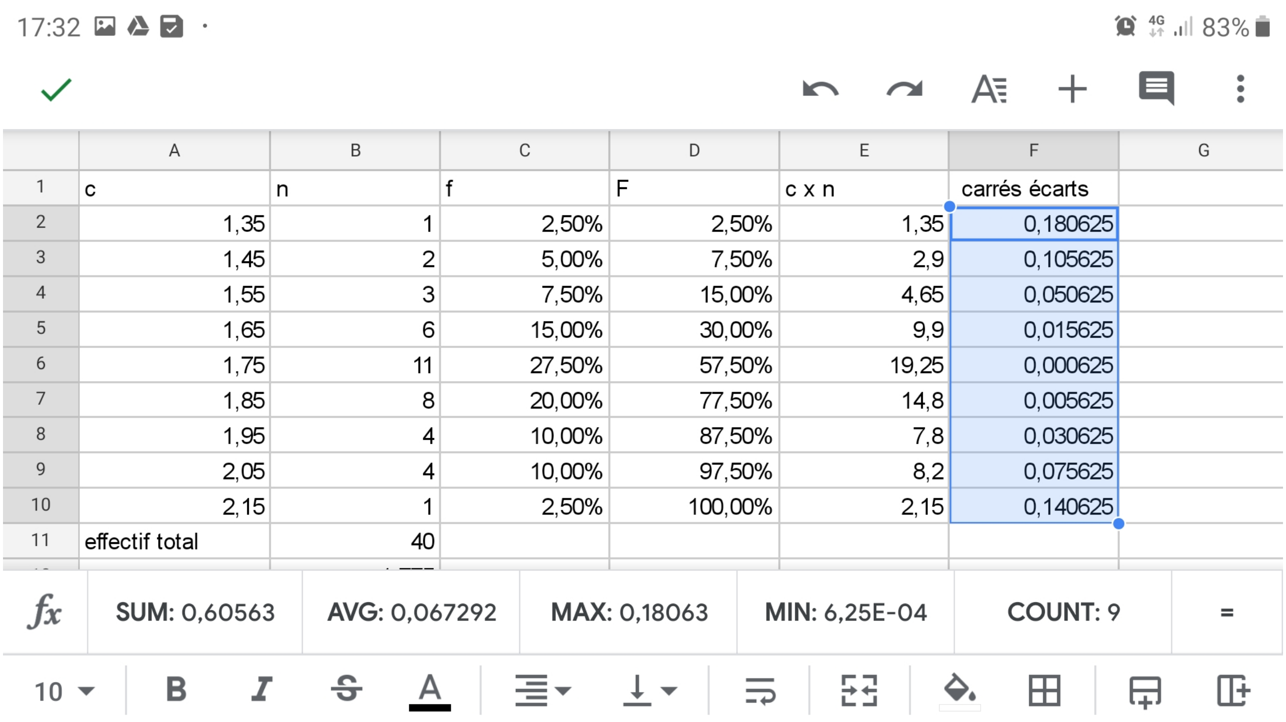
Variance

Pour éviter cela, faisons les carrés des écarts : $(x_i - \overline{x})^2$
et faisons-en la moyenne : $\frac{n_1.(x_1-\overline{x})^2+n_2.(x_2-\overline{x})^2+...+n_p.(x_p-\overline{x})^2}{n}$, cela donne un bon indice de dispersion appelé **variance** et noté V.
Calcule la variance de l'exemple 1 (colis postaux).
Utilise Sheets ou ta calculette en notant les résultats dans ton cahier.
La colonne F pour les carrés des écarts (la moyenne est en B12) :
$F2 = (A2 - B\$12)\hat{}2$



	A	B	C	D	E	F	G
1	c	n	f	F	c x n	carrés écarts	
2	1,35	1	2,50%	2,50%	1,35	0,180625	
3	1,45	2	5,00%	7,50%	2,9		
4	1,55	3	7,50%	15,00%	4,65		
5	1,65	6	15,00%	30,00%	9,9		
6	1,75	11	27,50%	57,50%	19,25		
7	1,85	8	20,00%	77,50%	14,8		
8	1,95	4	10,00%	87,50%	7,8		
9	2,05	4	10,00%	97,50%	8,2		
10	2,15	1	2,50%	100,00%	2,15		
11	effectif total	40					

puis Saisie automatique

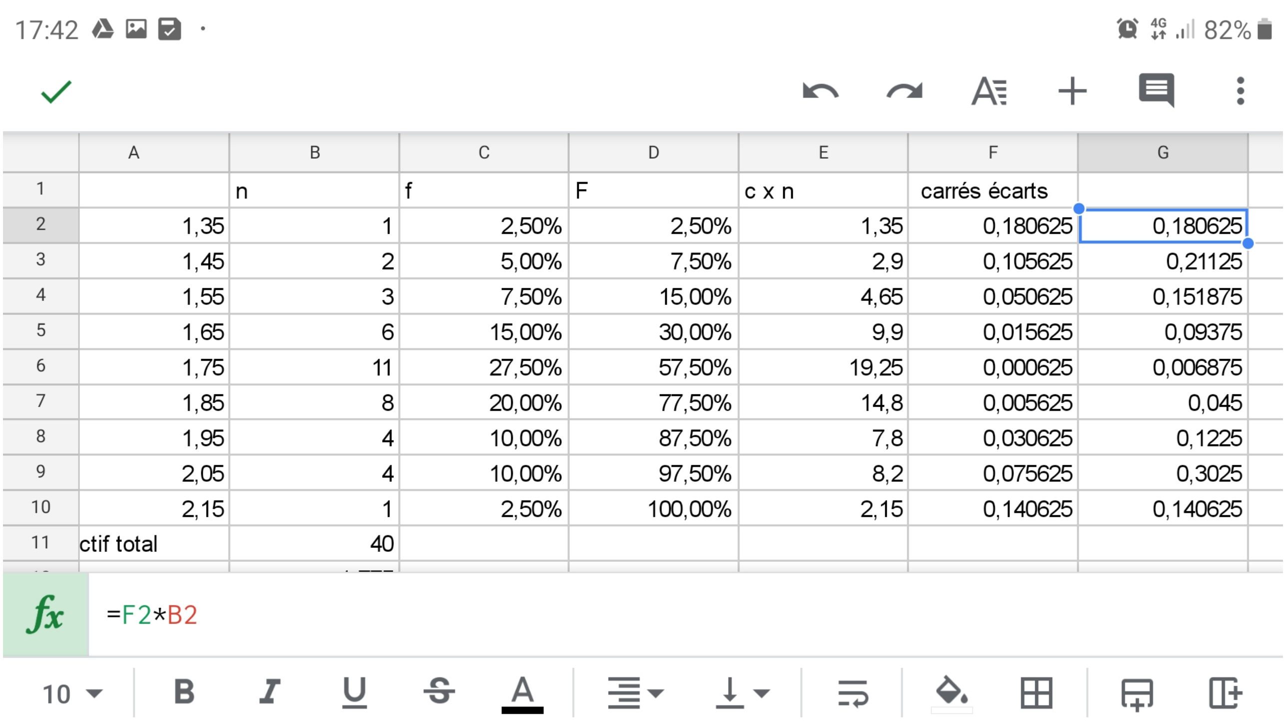


	A	B	C	D	E	F	G
1	c	n	f	F	c x n	carrés écarts	
2	1,35	1	2,50%	2,50%	1,35	0,180625	
3	1,45	2	5,00%	7,50%	2,9	0,105625	
4	1,55	3	7,50%	15,00%	4,65	0,050625	
5	1,65	6	15,00%	30,00%	9,9	0,015625	
6	1,75	11	27,50%	57,50%	19,25	0,000625	
7	1,85	8	20,00%	77,50%	14,8	0,005625	
8	1,95	4	10,00%	87,50%	7,8	0,030625	
9	2,05	4	10,00%	97,50%	8,2	0,075625	
10	2,15	1	2,50%	100,00%	2,15	0,140625	
11	effectif total	40					

Encore une colonne (G) pour les carrés des écarts multipliés par leur effectif

$G2 = F2 * B2$ suivi de la Saisie automatique :

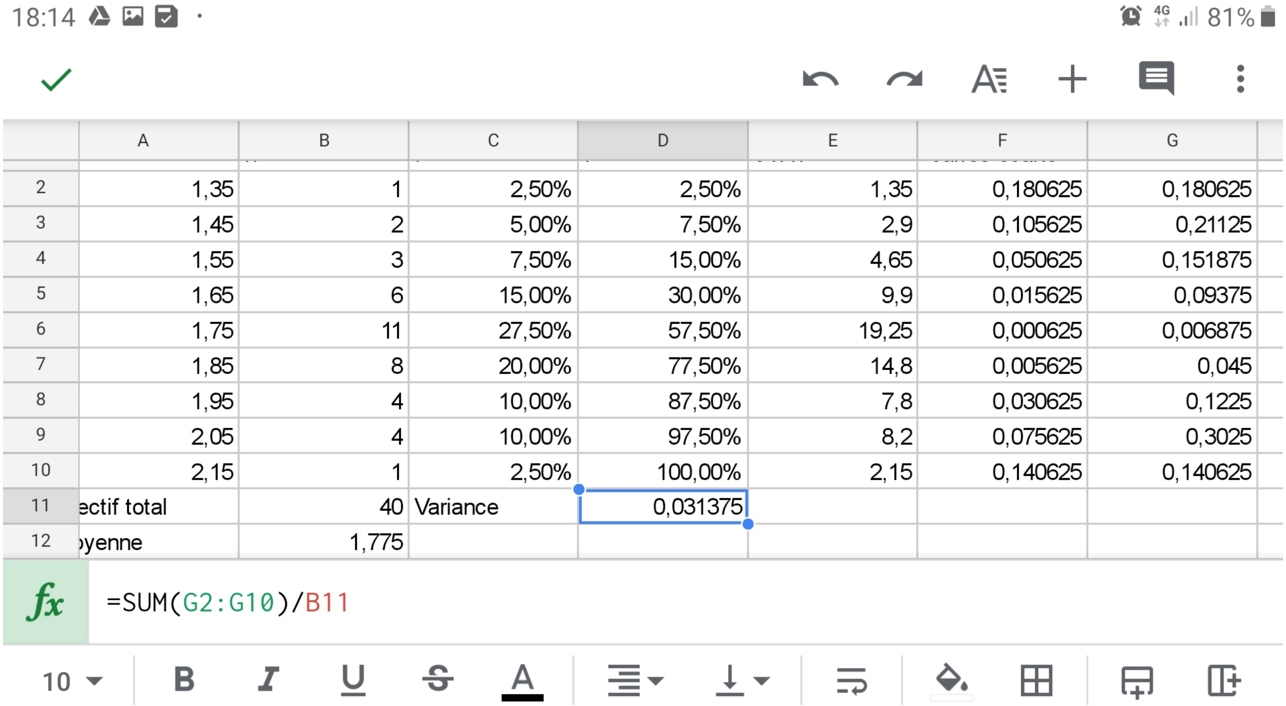
Cela donne les termes situés au numérateur de la variance.



	A	B	C	D	E	F	G
1		n	f	F	c x n	carrés écarts	
2	1,35	1	2,50%	2,50%	1,35	0,180625	0,180625
3	1,45	2	5,00%	7,50%	2,9	0,105625	0,21125
4	1,55	3	7,50%	15,00%	4,65	0,050625	0,151875
5	1,65	6	15,00%	30,00%	9,9	0,015625	0,09375
6	1,75	11	27,50%	57,50%	19,25	0,000625	0,006875
7	1,85	8	20,00%	77,50%	14,8	0,005625	0,045
8	1,95	4	10,00%	87,50%	7,8	0,030625	0,1225
9	2,05	4	10,00%	97,50%	8,2	0,075625	0,3025
10	2,15	1	2,50%	100,00%	2,15	0,140625	0,140625
11	ctif total	40					

qu'il suffit d'additionner puis diviser le tout par n.

$D11 = SUM(G2 : G10)/B11$



	A	B	C	D	E	F	G
2	1,35	1	2,50%	2,50%	1,35	0,180625	0,180625
3	1,45	2	5,00%	7,50%	2,9	0,105625	0,21125
4	1,55	3	7,50%	15,00%	4,65	0,050625	0,151875
5	1,65	6	15,00%	30,00%	9,9	0,015625	0,09375
6	1,75	11	27,50%	57,50%	19,25	0,000625	0,006875
7	1,85	8	20,00%	77,50%	14,8	0,005625	0,045
8	1,95	4	10,00%	87,50%	7,8	0,030625	0,1225
9	2,05	4	10,00%	97,50%	8,2	0,075625	0,3025
10	2,15	1	2,50%	100,00%	2,15	0,140625	0,140625
11	ectif total	40	Variance	0,031375			
12	›yenne	1,775					

=SUM(G2:G10)/B11

Cela donne $0,03138$. $0,03138$ quoi ? Au départ, les mesures et la moyenne sont donnés en kg. La moyenne des carrés des écarts (la variance) est donc de $0,03138\, kg^2$! Ce n'est pas très pratique, dans un exercice sur les masses d'obtenir un indice de dispersion en kg^2 !

Écart-type

La solution est toute simple : prendre la racine carrée positive de la variance : c'est l'écart-type.

Il vaut $0,177$ kg, c'est-à-dire 177 grammes.

L'écart-type est le paramètre de dispersion associé à la moyenne.

	moyenne	écart-type
Taille des élèves		
Colis postaux	1,775	$0,177$
Hauteur des meubles	100,16	
Cote d'un contrôle	5,6	
Taille des jeunes	168,9	

3.5 Inégalité de Pafnouti L Tchebychev

L'écart-type est le paramètre de dispersion associé à la moyenne.

L'inégalité de Tchebychev précise un peu les choses.

Petit Pafnouti

L'effectif compris dans l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$ est supérieure à $\frac{3}{4}$ de l'effectif total.

Grand Pafnouti

L'effectif compris dans l'intervalle $[\overline{x} - k\sigma; \overline{x} + k\sigma]$ est supérieure à $1 - \frac{1}{k^2}$ de l'effectif total.

Ce théorème est admis.

Vérifions le petit Pafnouti pour nos 5 exemples.

	$\overline{x}$	σ	$\overline{x} - 2\sigma$	$\overline{x} + 2\sigma$	effectif compris dans l'intervalle	n
Taille des élèves						
Colis postaux	$1,775$	$0,177$	$1,421$	$2,129$	39	40
Hauteur des meubles	$100,16$	1	$98,16$	$102,16$	98	
Cote d'un contrôle	$5,6$	$2,1$	$1,4$	$9,8$		
Taille des jeunes	$168,9$	$7,6$	$153,7$			

3.6 Calcul numérique

Le calcul numérique est la partie des mathématiques qui concerne les techniques de calcul.
Les mayas ($4^{ème}$siècle), les chinois ($12^{ème}$siècle) ont développé de telles techniques. Plus près de nous, Blaise Pascal (1650) inventa une machine à calculer et Carl-Friedrich Gauss (1800) fut un calculateur de génie.
C'est le moment de te souvenir des tables de multiplication !

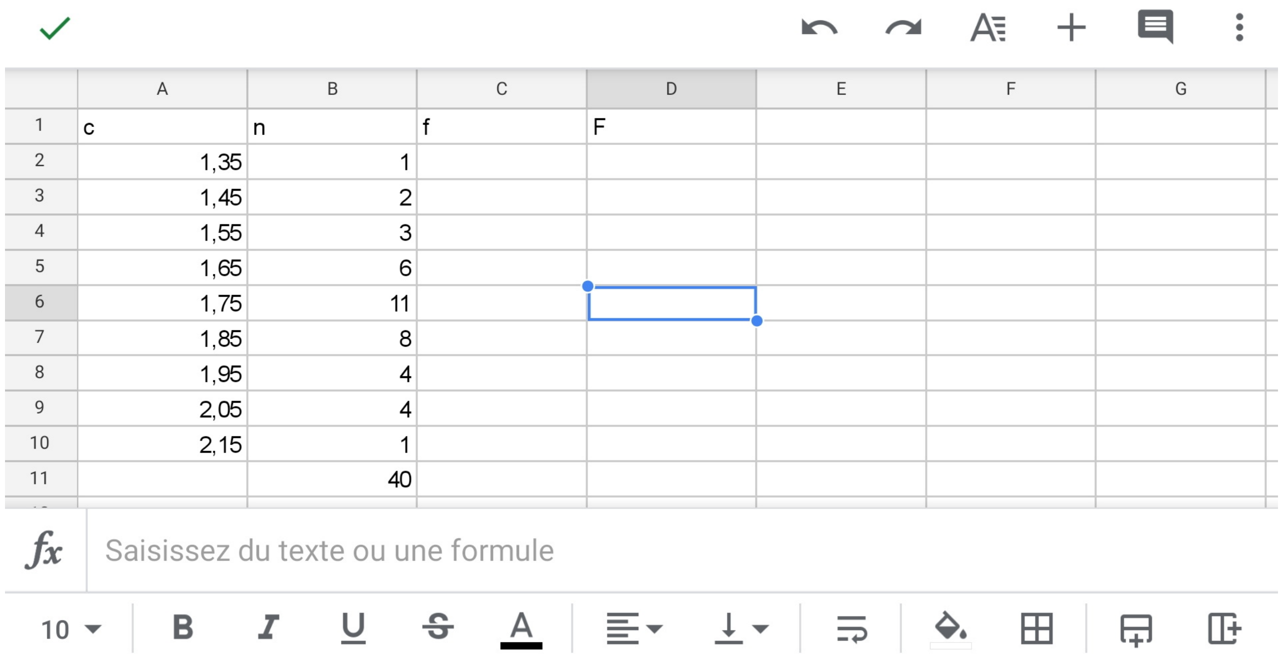
Pour les calculettes avec mode STAT, tu trouveras un résumé à cette adresse.

http ://ww2.ac-poitiers.fr/math_sp/IMG/pdf/mode_stat_calculatrices.pdf

Les tableurs LibreOffice (Calc) et Google Sheets sont utilisés dans ce cours.

Exemple des colis postaux avec Google Sheets

Voici les données à taper :



	A	B	C	D	E	F	G
1	c	n	f	F			
2	1,35	1					
3	1,45	2					
4	1,55	3					
5	1,65	6					
6	1,75	11					
7	1,85	8					
8	1,95	4					
9	2,05	4					
10	2,15	1					
11		40					

Remarques

Google Sheets enregistre automatiquement le fichier. Pour lui donner un nom facile à retrouver (ColisPostaux par exemple), il faut quitter cet écran avec

et revenir à l'écran des fichiers de Google Sheets pour changer le nom (menu à trois points).

Pour écrire dans une cellule, sélectionne-la et écris dans « Saisissez du texte ou une formule ». Les nombres sont alignés à droite dans la cellule, ce qui permet souvent de les reconnaître.

Les classes n'ont pas été écrites : seuls leurs centres sont utilisés.

Un nom a été donné à chaque colonne : c, n, f et F pour les centres, les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées.

40 n'est pas une donnée : c'est l'effectif total, la somme de tous les effectifs. Calculons-le

Écrire une formule avec un tableur

La première chose à faire est de sélectionner la cellule. Celle-ci contiendra à la fois la formule et le résultat.

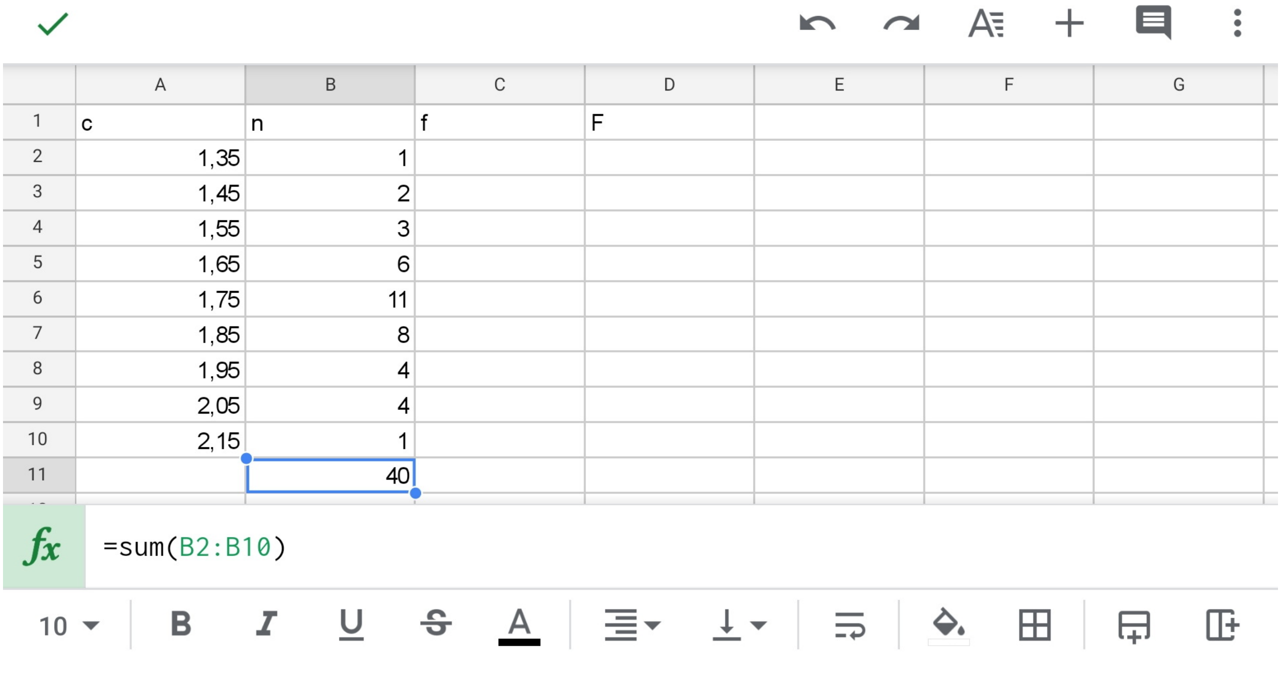
$= SUM(B2 : B10)$

Le signe $=$ indique qu'il s'agit d'une formule.

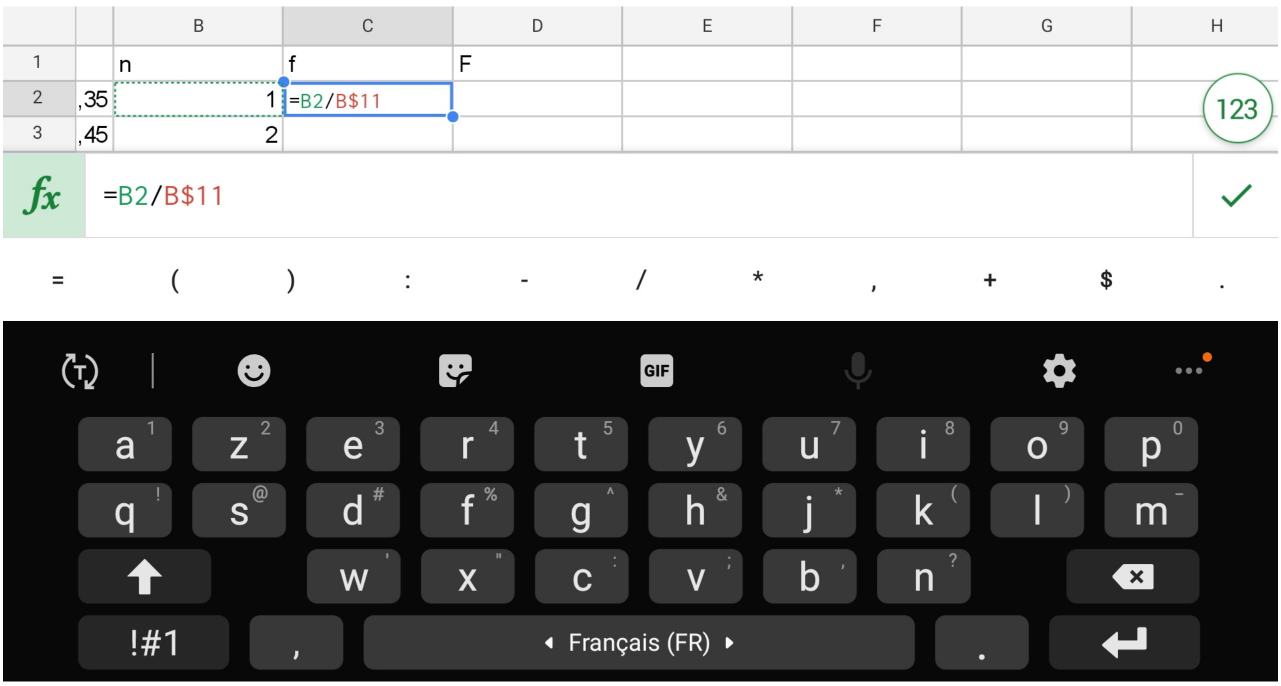
SUM indique qu'il faut faire la somme.

$B2 : B10$ indique qu'il faut faire additionner le contenu des cellules B2 à B10.

Une fois la formule tapée, le résultat apparaît.



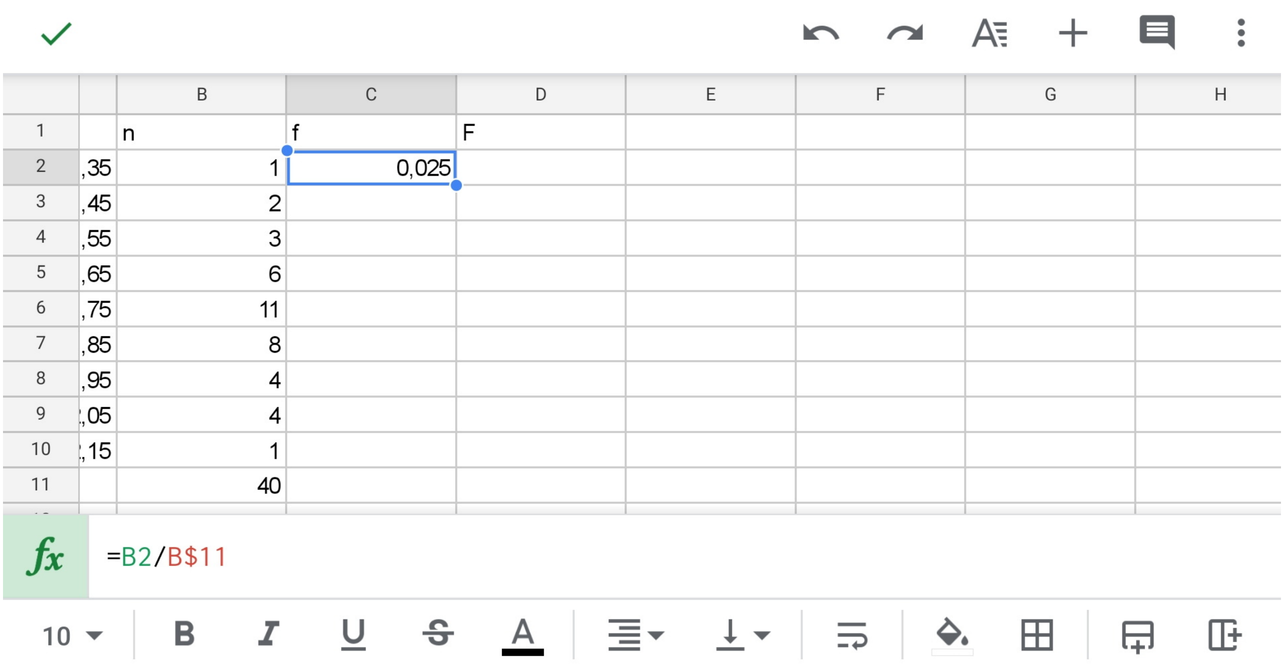
Faisons la même chose pour les fréquences.



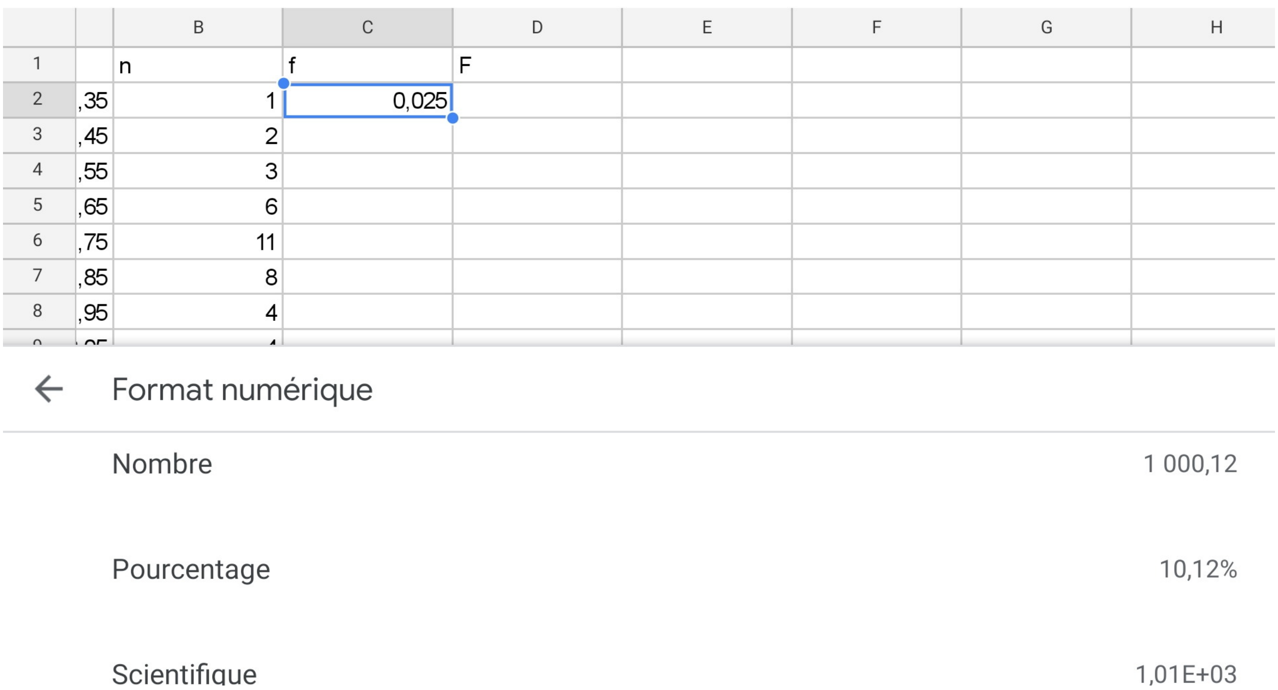
La première fréquence est le quotient de n_1 (dans la cellule B2) et de n (dans la cellule B11).

La formule commence bien par $=$ mais il y a un $\$$. Pourquoi ?

Nous allons le voir tout de suite. Remarque d'abord que le résultat s'affiche dès que tu tapes sur ✓ .



Tu veux des % ? Tape sur puis va dans Cellule -> Format numérique. Choisis Pourcentage au lieu de Automatique.



La Saisie automatique avec le tableur

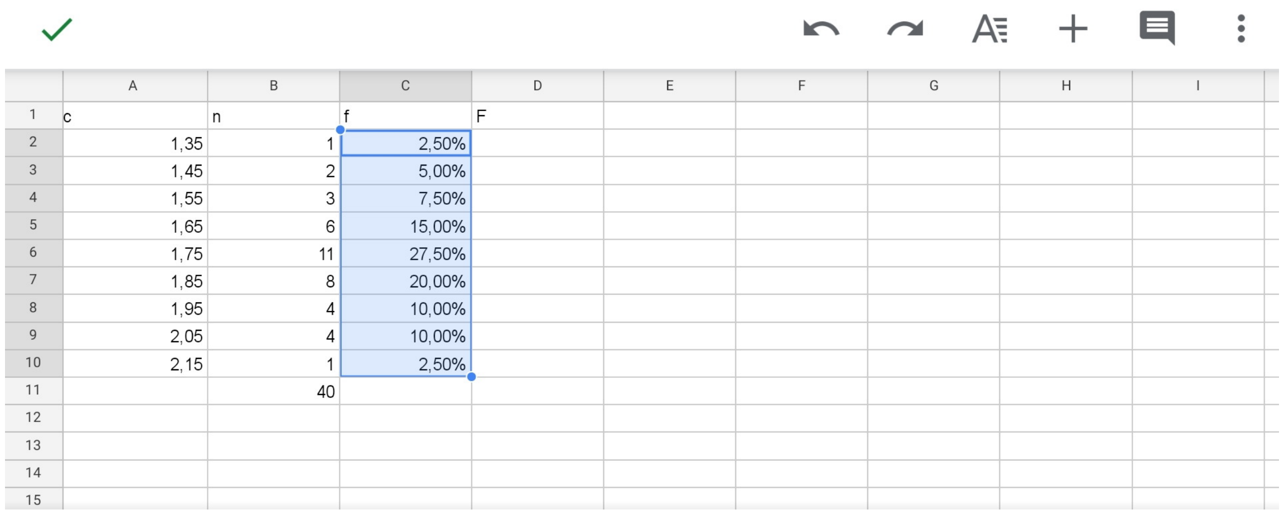
Lorsque tu sélectionnes la cellule C2, tu vois un petit carré bleu en-dessous à droite :

c'est la poignée de recopie.

Fais-la glisser de façon à sélectionner de C2 à C10.

Tape sur la zone et un menu apparaît pour lancer la Saisie automatique.

Le résultat est saisissant...



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	c	n	f	F					
2	1,35	1	2,50%						
3	1,45	2	5,00%						
4	1,55	3	7,50%						
5	1,65	6	15,00%						
6	1,75	11	27,50%						
7	1,85	8	20,00%						
8	1,95	4	10,00%						
9	2,05	4	10,00%						
10	2,15	1	2,50%						
11		40							
12									
13									
14									
15									

Toutes les fréquences ont été calculées !

Comment est-ce possible ?

Dans la formule $= B2/B\$11$, B2 a été remplacé par B3, B4, ... lors de la Saisie automatique.

B11 lui n'a pas changé car il a été noté B$11.

A toi

Fais apparaître les fréquences cumulées.

$D2 = C2$ puisque la première fréquence cumulée est égale à la première fréquence.

$D3 = C3 + D2$ puisqu'une fréquence cumulée est égale à

la fréquence + la somme de toutes les fréquences précédentes, c'est-à-dire LA fréquence cumulée précédente.

La Saisie automatique fait le reste.

	A	B	C	D
1		n	f	F
2	,35	1	2,50%	2,50%
3	,45	2	5,00%	7,50%
4	,55	3	7,50%	15,00%
5	,65	6	15,00%	30,00%
6	,75	11	27,50%	57,50%
7	,85	8	20,00%	77,50%
8	,95	4	10,00%	87,50%
9	,05	4	10,00%	97,50%
10	,15	1	2,50%	100,00%
11		40		

Le polygone des fréquences cumulées avec Sheets

Il est tentant de faire tracer des graphiques (diagrammes) à un tableur.
Sur ordinateur, c'est assez facile.
Sur smartphone, avec Sheets, c'est tout autre chose. Pourquoi ?
Parce que l'axe horizontal utilise les numéros de cellules,
pas les centres de classe !
De toutes façons, avec une calculette STAT, ce n'était pas mieux.
La solution ?

Utilisons notre cahier quadrillé
un crayon de dessin
et des crayons de couleur !
L'histogramme des effectifs pour trouver le mode,
le polygone des fréquences cumulées pour trouver la médiane,
et la moyenne dans tout ça ?

La moyenne

Avec une calculette STAT, tu introduis les deux premières colonnes du tableau (centres et effectifs) et à l'aide de l'une ou l'autre touche, le résultat s'affiche, généralement sous la forme $\overline{x}$.

Avec un tableur, nous allons employer la formule $\overline{x} = \dfrac{n_1.x_1 + n_2.x_2 + ... + n_p.x_p}{n}$

Les termes du numérateurs sont facile à placer dans la colonne suivante E :

$E2 = A2 * B2$

	A	B	C	D	E	F	G
1	c	n	f	F			
2	1,35	1	2,50%	2,50%	1,35		
3	1,45	2	5,00%	7,50%			
4	1,55	3	7,50%	15,00%			
5	1,65	6	15,00%	30,00%			
6	1,75	11	27,50%	57,50%			
7	1,85	8	20,00%	77,50%			
8	1,95	4	10,00%	87,50%			
9	2,05	4	10,00%	97,50%			
10	2,15	1	2,50%	100,00%			
11		40					

fx =A2*B2

et ensuite, Saisie automatique !

	A	B	C	D	E	F	G
1	c	n	f	F			
2	1,35	1	2,50%	2,50%	1,35		
3	1,45	2	5,00%	7,50%	2,9		
4	1,55	3	7,50%	15,00%	4,65		
5	1,65	6	15,00%	30,00%	9,9		
6	1,75	11	27,50%	57,50%	19,25		
7	1,85	8	20,00%	77,50%	14,8		
8	1,95	4	10,00%	87,50%	7,8		
9	2,05	4	10,00%	97,50%	8,2		
10	2,15	1	2,50%	100,00%	2,15		
11		40					

Poursuivons le calcul de la moyenne dans la cellule B12 :

addition des termes du numérateur et division par n.

$B12 = SUM(E2 : E10)/B11$

	A	B	C	D	E	F	G
2	1,35	1	2,50%	2,50%	1,35		
3	1,45	2	5,00%	7,50%	2,9		
4	1,55	3	7,50%	15,00%	4,65		
5	1,65	6	15,00%	30,00%	9,9		
6	1,75	11	27,50%	57,50%	19,25		
7	1,85	8	20,00%	77,50%	14,8		
8	1,95	4	10,00%	87,50%	7,8		
9	2,05	4	10,00%	97,50%	8,2		
10	2,15	1	2,50%	100,00%	2,15		
11		40					
12		1,775					

fx =sum(E2:E10)/B11

Et avec LibreOffice ?

Utiliser un tableur tel que LibreOffice sur un ordinateur, c'est avoir un grand écran, un vrai clavier et une souris (souvent) docile : le confort !

Les explications données avec Sheets s'appliquent à LibreOffice, aussi pour le calcul de la moyenne.

En sélectionnant les centres de classes et une autre série de cellules, on peut obtenir le graphique souhaité.

Les graphiques de ce cours sont produits de cette manière.

Le cahier quadrillé et les crayons fonctionnent aussi très bien.

Exercices supplémentaires en ligne

Le premier caractère est le nombre d'enfants d'une famille.

Ce caractère est discret.

Qu'est-ce que cela signifie ?

Un caractère discret prend un nombre fini de valeurs (de modalités). Aucune valeur intermédiaire n'est possible.

Le second caractère est la cote obtenue aux olympiades de mathématiques.

Ce caractère est discret aussi.

Comme il y a beaucoup plus que 10 possibilités, il sera nécessaire de répartir les modalités en classes.

Le troisième caractère est la vitesse sur autoroute.

Ce caractère est continu.

Qu'est-ce que cela signifie ?

Entre deux valeurs d'un caractère discret, il est toujours possible de trouver une autre valeur.

En statistique, il sera toujours nécessaire de répartir les modalités d'un caractère continu en classes.

Tu peux reprendre une activité discrète et continue.

1. Le village de Losse-en-Gelaisse compte 50 familles

   Le nombre d'enfants à charge de ces familles est donné par le tableau suivant.

0	7	1	1	0	3	1	0	4	0
2	1	0	0	2	0	4	1	1	5
0	1	2	1	6	0	1	1	3	0
1	5	2	3	0	1	1	7	2	5
2	5	0	2	4	1	0	6	1	3

   (a) Dresse le tableau ordonné,

   (b) trace le diagramme en bâtonnets des fréquences,

   (c) le polygone des fréquences cumulées,

   (d) calcule le mode, la moyenne et la médiane

   (e) et leurs indicateurs de dispersion respectifs.

2. Les éliminatoires des Olympiades de mathématiques ont donné les résultats suivants

Résultat obtenu	Nombre d'élèves
$]30;40]$	1
$]40;50]$	4
$]50;60]$	39
$]60;70]$	97
$]70;80]$	144
$]80;90]$	76
$]90;100]$	20
$]100;110]$	6
$]110;120]$	1

   (a) Complète le tableau.

   (b) Trace l'histogramme des effectifs.

(c) Trace le polygone des fréquences cumulées.

(d) Calcule les indicateurs de position et de dispersion.

(e) Si on décide de qualifier le quart des élèves ayant obtenu les meilleurs résultats, quel seuil de qualification faudra-t-il fixer ?

(f) Si on décide de qualifier les 40 élèves ayant obtenu les meilleurs résultats, quel seuil de qualification faudra-t-il fixer ?

(g) On considère comme « honorable » un résultat compris dans l'intervalle $[\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma]$. Calcule le nombre d'élèves ayant obtenu un résultat honorable.

3. Les services de répression des infractions ont relevé les vitesses suivantes (en km/h) :

Classe	Nombre de véhicules
$[60;70[$	4
$[70;80[$	5
$[80;90[$	10
$[90;100[$	20
$[100;110[$	50
$[110;120[$	40
$[120;130[$	55
$[130;140[$	6
$[140;150[$	4
$[150;160[$	3
$[160;240[$	3

Les données figurant ici sont une fiction. Toute ressemblance avec des faits existants ou ayant existé est purement fortuite. Aucun animal n'a été maltraité pendant le tournage.

(a) Dresse le tableau ordonné,

(b) trace l'histogramme des fréquences,

(c) le polygone des fréquences cumulées.

(d) Calcule les indicateurs de position

et leurs indicateurs de dispersion respectifs ;

(e) invente une question à propos des 3 dernières classes.

3.7 Séries chronologiques

La récolte des données évoluant au cours du temps et l'interprétation de leur évolution sont des domaines très subtils à propos desquels des livres entiers ont été écrits. Cette partie en est une simple évocation.

Valeur de l'euro en 2008

Le tableau suivant donne la valeur en USD d'un euro en 2008.

Mois	Valeur
Janvier	1,4688
Février	1,4889
Mars	1,5167
Avril	1,566
Mai	1,5458
Juin	1,5521
Juillet	1,5775
Août	1,5574
Septembre	1,4621
Octobre	1,4081
Novembre	1,2757
Décembre	1,2608

D'octobre à novembre, l'euro a perdu $9,4\%$ de sa valeur.

Il s'agit tout simplement de la part de gâteau perdue, $1,4081 - 1,2757$, rapportée à la valeur du gâteau de départ, soit
$\dfrac{1,4081 - 1,2757}{1,4081} = 0,094 = 9,4\%$.

$0,094 = 9,4\%$ est la variation relative, ou taux d'évolution.

Autrement dit, $1,2757 = 1,4081 - 0,094.1,4081 = (1 - 0,094)\,.1,4081$.

$1 - 0,094$ est le coefficient multiplicateur.

Si l'euro gagne de la valeur, par exemple de mars à avril, le coefficient multiplicateur est supérieur à 1.

Exercice

1. Calcule le taux d'évolution (variation relative) et le coefficient multiplicateur pour chaque passage au mois suivant (précision : 5 décimales).

Remarque

Si je multiplie la valeur du mois de janvier par son coefficient multiplicateur,
j'obtiens la valeur du mois de février.
Si je multiplie la valeur du mois de février par son coefficient multiplicateur,
j'obtiens la valeur du mois de mars.
Donc, si je multiplie la valeur du mois de janvier par son coefficient multiplicateur, puis par le coefficient multiplicateur suivant,
j'obtiens la valeur du mois de mars.
Et si je multiplie la valeur du mois de janvier
par tous les coefficients multiplicateurs, j'obtiens la valeur du mois de décembre !
Attention aux erreurs d'arrondis.

Exercices

2. Entre les valeurs de mars et octobre,
   (a) vérifie cette propriété,
   (b) calcule le taux d'évolution.
3. A l'envers cette fois, d'octobre à mars
   (a) Quel est le coefficient multiplicateur ?
   (b) Quel en est le taux d'évolution ?

3

Infections au virus Covid-19

Le tableau suivant donne le nombre d'infections relevées mois par mois dans une partie du monde.

Mois	Nombre de personnes infectées
mars 2020	12775
avril 2020	36225
mai 2020	9381
juin 2020	3046
juillet 2020	6579
août 2020	17036
septembre 2020	32073
octobre 2020	295199

Exercice

4. Quel est le taux de variation (variation relative) de mai à juin ? Interprète.
5. De septembre à octobre
   (a) Quel est le taux de variation ?
   (b) Quel est le taux de variation réciproque (d'octobre à septembre) ? Interprète.

Chapitre 4

Géométrie analytique plane

Table des matières

Objectifs

CONNAÎTRE

- Associer un lieu à son expression analytique.
- Représenter un vecteur dans le plan.

APPLIQUER

- Construire la somme de deux vecteurs.
- Représenter un multiple de vecteur.
- Décomposer un vecteur selon deux directions données.
- Rechercher les équations vectorielle et cartésienne d'une droite.
- Rechercher l'équation d'une droite comprenant deux points, comprenant un point et de direction donnée.
- Calculer la distance d'un point à une droite.
- Rechercher une équation cartésienne d'un cercle.
- Rechercher le centre et le rayon d'un cercle d'équation donnée.

- Construire une parabole de foyer et de directrice donnée.
- Rechercher une intersection entre droites, entre droite et cercle.

TRANSFÉRER

- Vérifier une propriété géométrique élémentaire par une méthode analytique.
- Résoudre un problème de géométrie analytique plane.
- Rechercher les coordonnées de points d'intersection de droites remarquables d'un triangle en limitant la technicité ou en utilisant l'outil informatique.

En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'une équerre - rapporteur.

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/geometrie

4.0 Prérequis

Résous le système d'équations $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$.

Le but est que ces deux équations soient simultanément vraies.

La première est vraie si $x = -2$ et $y = 0$, ce qui se note $(-2; 0)$,

Mais la seconde est fausse ($-2 = 5$) !

La seconde est vraie si $x = 5$ et $y = 0$, ce qui se note $(5; 0)$,

Mais la première est fausse ($10 = -4$) !

Pour ne pas perdre notre temps,

nous allons utiliser la méthode des combinaisons.

Il s'agit de remplacer la première équation, trop compliquée,

par une somme de multiples des deux équations.

Tu peux utiliser n'importe quels multiples, mais l'intérêt est d'obtenir une équation simple, par exemple sans x.

Si la première équation reste inchangée ($\times 1$) et la seconde multipliée par -2 en les additionnant les x disparaissent !

$\left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y = -4 \\ x - 2y = 5 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \Bigg|$ $\begin{cases} (2x - 2x) \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ Il faut faire la même chose avec les y :

$\begin{cases} (3y + 4y) \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ et avec les termes indépendants : $\begin{cases} 7y = (-4 - 10) \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ et il reste à remplacer dans la seconde équation : $\begin{cases} y = -2 \\ x - 2.(-2) = 5 \end{cases}$

Nous obtenons la solution $(1; -2)$.

Tu peux la vérifier.

Résous le système d'équations $\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases}$.

La méthode des combinaisons fonctionne. En voici une autre :

$$\begin{cases} -x + 1 = 2x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3x = 6 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 + 1 \end{cases}$$

Nous obtenons la solution $(-2; 3)$.

Tu peux la vérifier.

Exercices

1. Résous les systèmes suivants par la méthode des combinaisons.

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ x - 4y = -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$

2. Résous les systèmes suivants par substitution.

(a) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 5x - 12 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ y = x - 1 \end{cases}$

3. Résous les systèmes suivants par la méthode de ton choix.

(a) $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y - 3x = -5 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + y = -5 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

4. La translation $\overrightarrow{QP}$ est la translation qui applique le point Q sur le point P.

   Construis les figures demandées.

   (a) Le segment $[QP]$ et son image par la translation $\overrightarrow{u}$.

   (b) Le segment $[QR]$ et son image par la translation $\overrightarrow{QP}$.

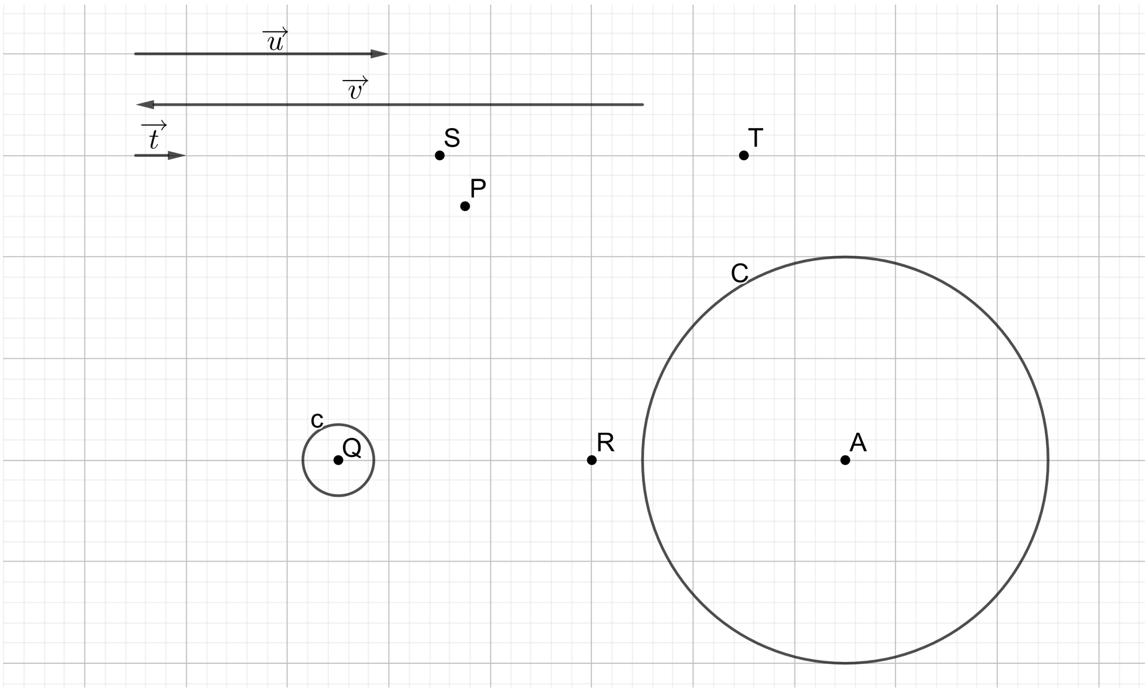
   (c) L'image du cercle C par la translation $\overrightarrow{v}$.

   (d) L'image du point S par la translation $\overrightarrow{t}$.

   (e) L'image du point T par la translation $-\overrightarrow{t}$.

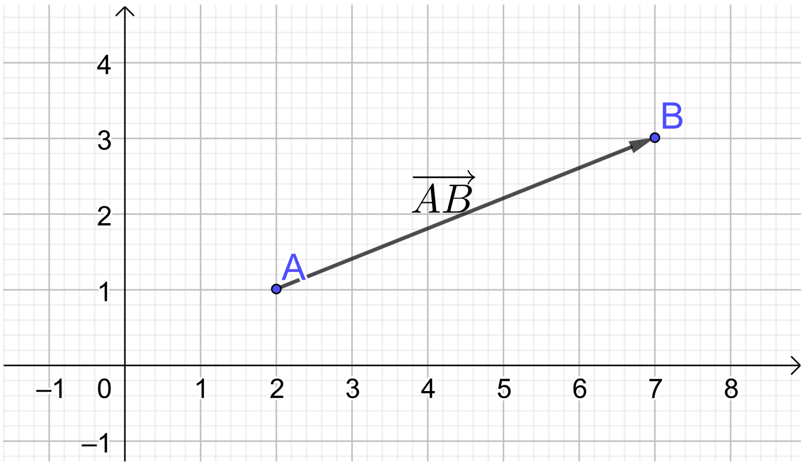
   (f) L'image du cercle c par la translation $\overrightarrow{u}$.

   (g) Trace les segment $[PS]$, $[SS']$, $[P'T]$ et $[TT']$.



4.1 Points et vecteurs

Un vecteur est formé de deux points et un ordre.
Ainsi, les points A et B définissent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.
A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$; B en est l'extrémité.



La notion de **vecteur** est identique à la notion de **translation** ou de **déplacement** de A en B.
Tout ce qui se trouve entre A et B n'a aucune importance.
Seuls comptent A (l'origine) et B (l'extrémité).

Dans le dessin ci-dessus, le vecteur va de $A\,(2;1)$ à $B\,(7;3)$.

Il faut donc ajouter 5 à la première coordonnée de A

et 2 à la deuxième coordonnée de A pour obtenir B.

$(5;2)$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les nombres qu'il faut ajouter aux coordonnées de A pour obtenir les coordonnées de B.

Autrement dit, les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

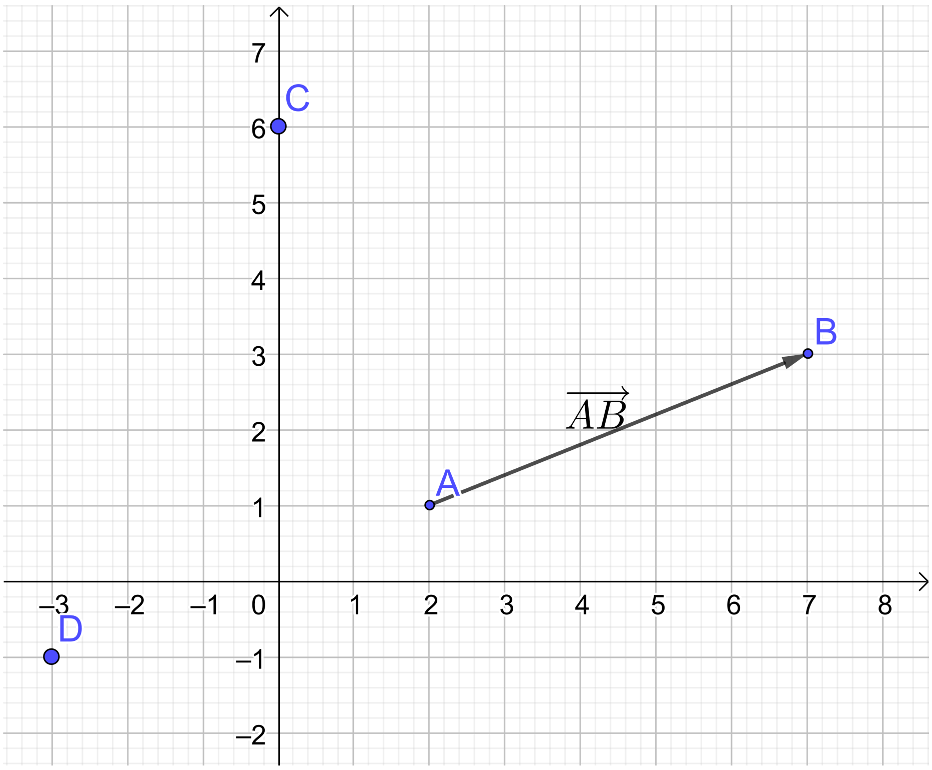
La distance entre A et B peut être obtenue par le théorème de Pythagore :

$[AB]$ joue le rôle de l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes.

Cela donne : $|AB|^2 = 5^2 + 2^2$

$|AB| = \sqrt{29}$

La distance entre A et B est appelée la **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Détermine les composantes et la norme des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont la même

Pourtant, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas la même

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont la même direction mais n'ont pas le même

Celui-ci est vraiment nul !

Le vecteur dont l'extrémité est égale à l'origine est appelé vecteur nul.

Il se note $\overrightarrow{AA}$ ou $\overrightarrow{0}$.

Ses composantes sont $(0; 0)$.

Sa norme est 0.

Il n'a ni sens, ni direction.

Le vecteur existe aussi en version hybride

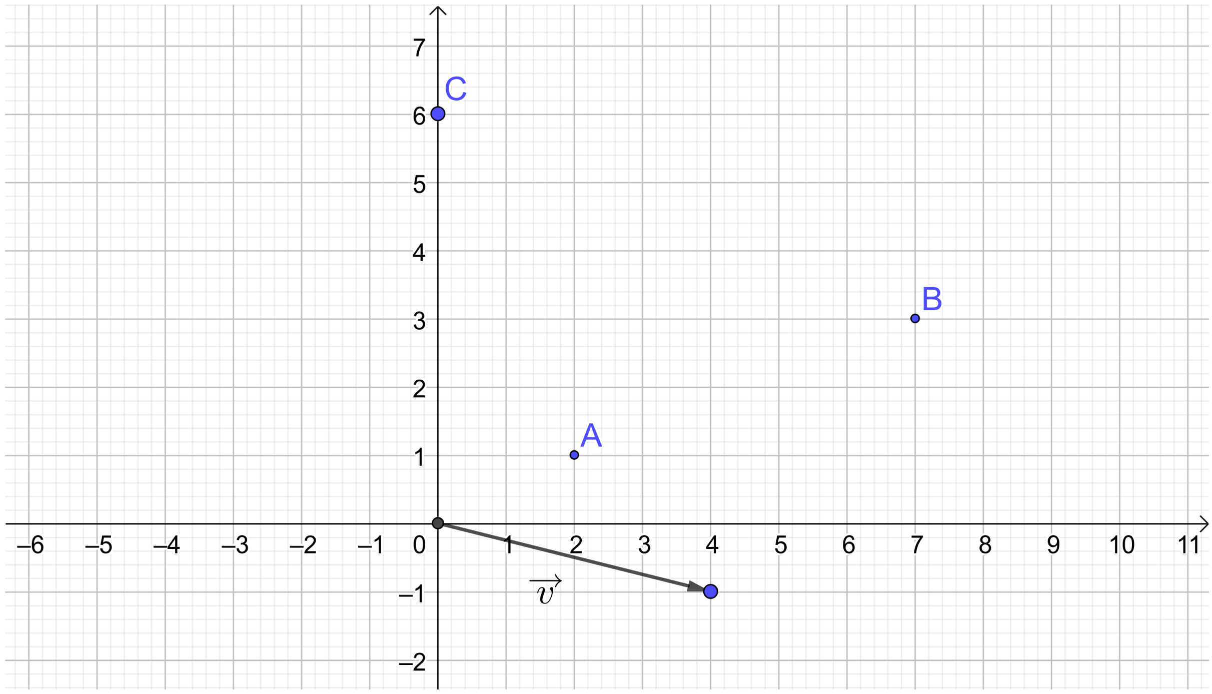
Prenons le vecteur $\overrightarrow{v}$ de composantes $(4; -1)$.

Son job est d'ajouter 4 horizontalement (x) et -1 verticalement (y).

Et ça marche avec n'importe quel point !

Pour me simplifier la vie, je l'ai tracé avec origine $(0;0)$.

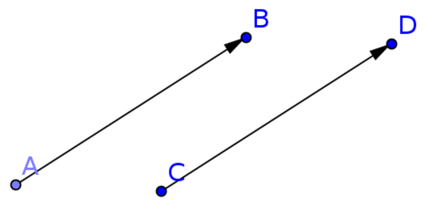
Trace-le avec les points A et B comme origine et le point C comme extrémité (3 vecteurs).



Deux vecteurs qui ont les mêmes composantes sont **égaux**.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** s'ils sont nuls tous les deux ou s'ils ont même direction, même sens et même norme.

On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Cela fait deux fois « égaux ».
Est-ce bien normal ?

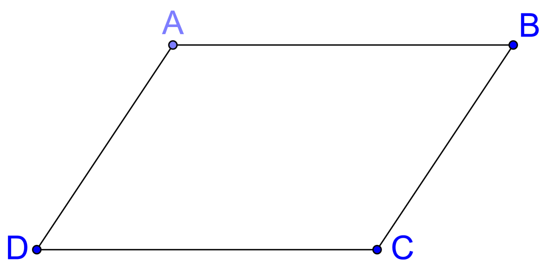
Le vecteur est une notion de géométrie (deux points et un sens) et d'algèbre (composantes).

C'est donc un objet hybride qui n'a pas fini de nous étonner.
En algèbre, il y a des opérations et en géométrie des constructions. Étrange...

Propriété

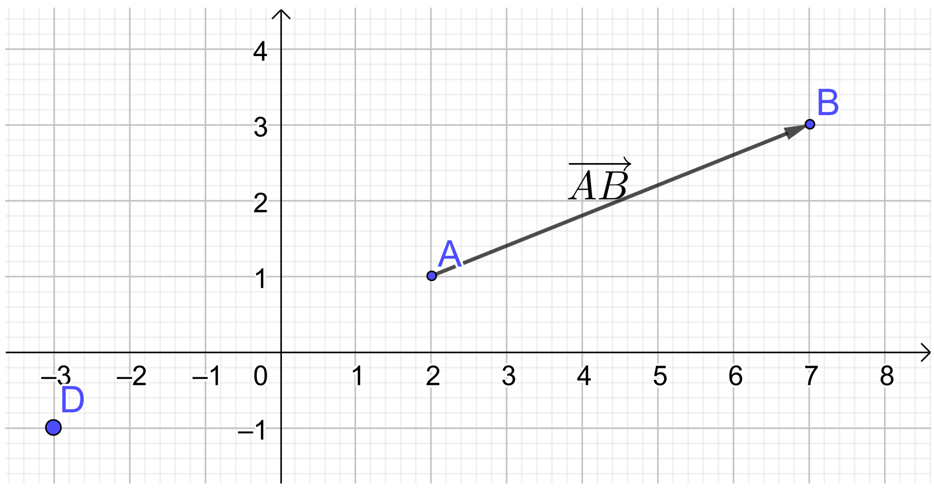
Soient A , B , C et D quatre points du plan non alignés 3 à 3.
ABCD est un parallélogramme
si et seulement si

ou



Vecteurs opposés

Un vecteur est formé de deux points et un ordre.
Ainsi, les points A et B définissent les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.
$\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AB}$ est le vecteur opposé de $\overrightarrow{BA}$.
On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.



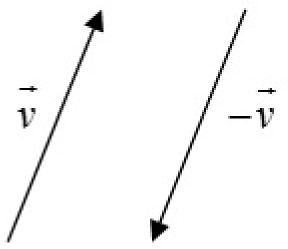
Sur la figure, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AD}\,(-5;-2)$ et $\overrightarrow{AB}\,(5;2)$.

Deux vecteurs opposés ont des composantes opposées.

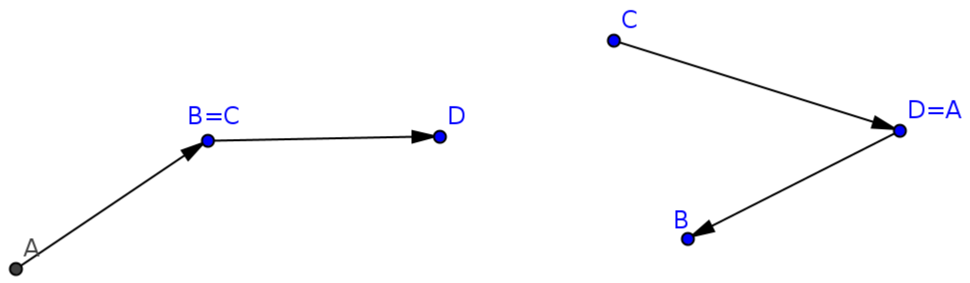
Géométriquement : Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont même direction et même norme mais sont de sens opposés.

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{v}$ sera noté $-\overrightarrow{v}$.



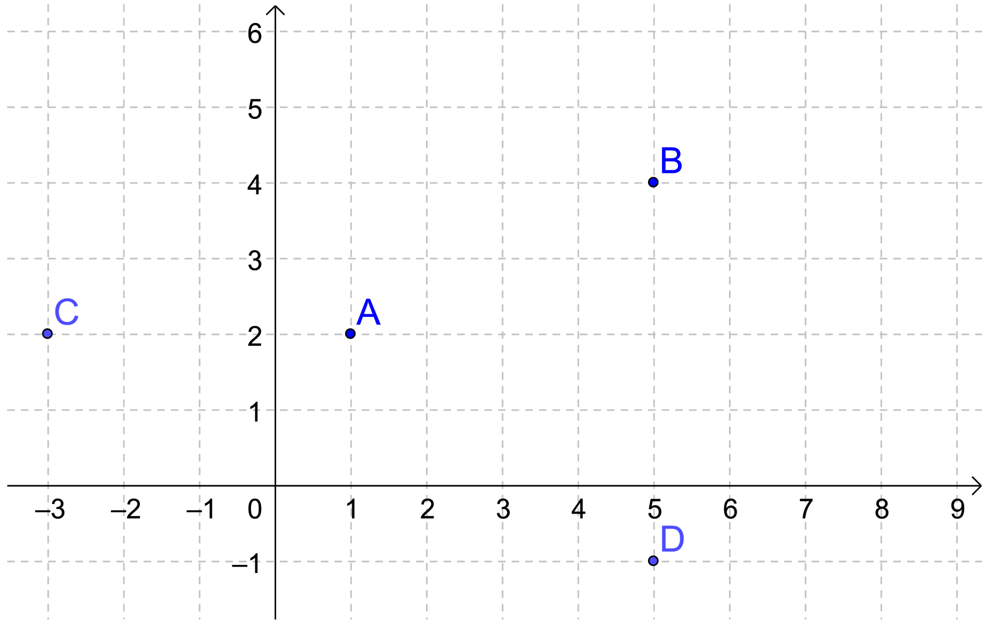
Vecteurs consécutifs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont consécutifs lorsque l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre, c'est-à-dire lorsque $B = C$ ou lorsque $D = A$.

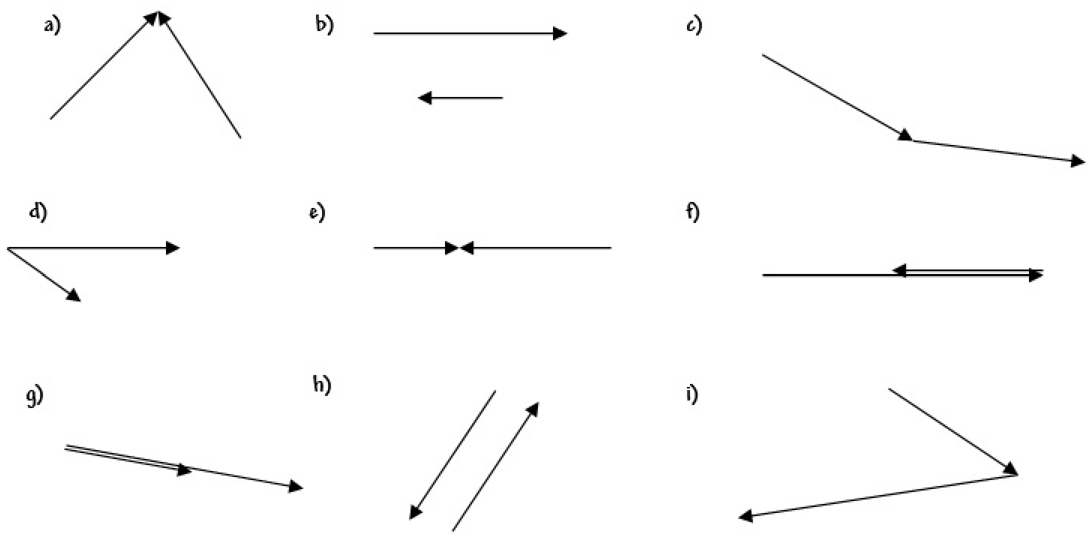


Exercices

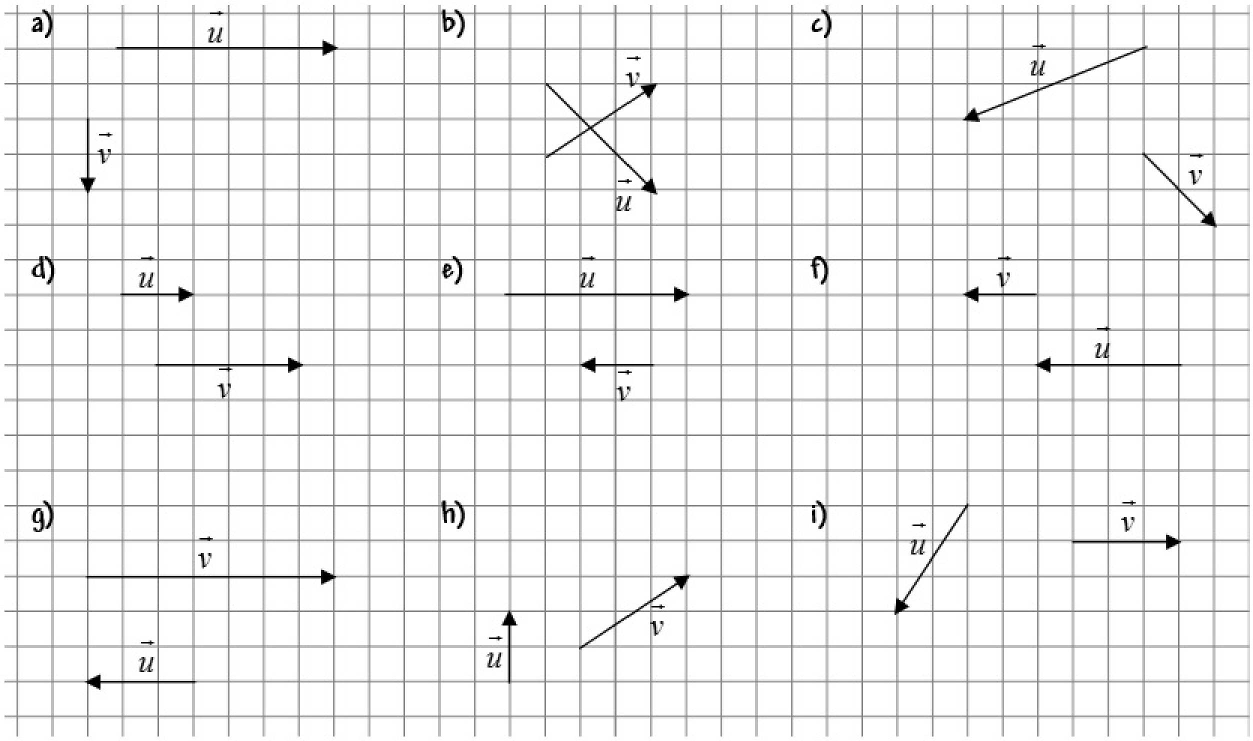
1. Détermine les composantes et les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CB}$.



2. Donne avec précision la position relative (origine, extrémité, consécutifs, direction, sens, norme) des deux vecteurs donnés.

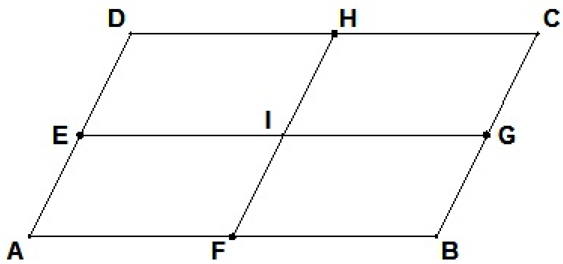


3. Construis le vecteur égal à $\overrightarrow{v}$ qui est consécutif au vecteur $\overrightarrow{u}$.



4. Voici un parallélogramme et ses médianes.

   En utilisant les points indiqués, cite tous les vecteurs égaux à :



$\overrightarrow{AB} =$
$\overrightarrow{CB} =$
$\overrightarrow{HI} =$
$\overrightarrow{EF} =$
$\overrightarrow{AA} =$

5. Dans un repère, $A\,(2;3)$, $B\,(-4;5)$, $C\,(-3;-4)$ et $D\,(5;-1)$.

   (a) Calcule les composantes des vecteurs

   $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BB}$.

   (b) Calcule $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$.

6. Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a comme composantes $(-5;2)$, trouve les coordonnées de

   (a) A si $B(-1;3)$

   (b) B si $A(0;4)$

7. Soients $A(1;k)$ et $B(6;7)$.
   Détermine les valeurs du nombre k pour que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{34}$.

8. Détermine les valeurs des réels m et n pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}(m+2;5)$ et $\overrightarrow{v}(-1;n^2+1)$ soient égaux.

9. Dans chaque cas, détermine les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

   (a) $A(2;-4)$, $B(-1;3)$ et $C(6;2)$

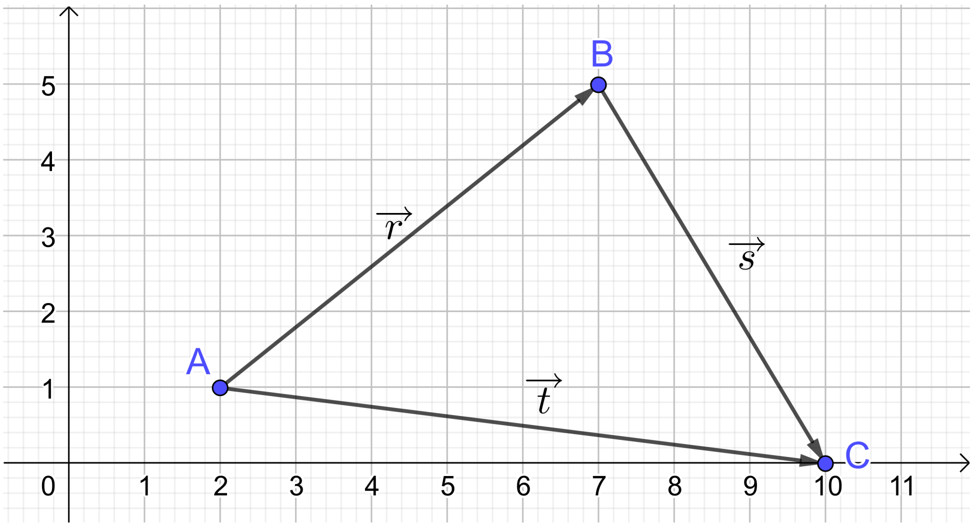
   (b) $A(-\frac{3}{2};\frac{5}{3})$, $B(1;-2)$ et $C(\frac{7}{2};1)$

4

4.2 Opérations sur les vecteurs

Le vecteur est un objet à la fois de l'algèbre et de la géométrie.

Relation de Chasles[1]



Pour tous points A, B, C,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette relation exprime que le déplacement de A à B
suivi du déplacement de B à C donne le déplacement de A à C.

[1] Michel Chasles, , 1793 - 1880, fut le premier professeur de géométrie supérieure à l'académie des sciences de Paris.

Cette relation est un mélange subtil d'algèbre (+ =) et de géométrie (A B C). Seul le vecteur permet de faire cela.
On n'additionne pas des droites et on ne fait pas d'intersection de nombres !

Composantes

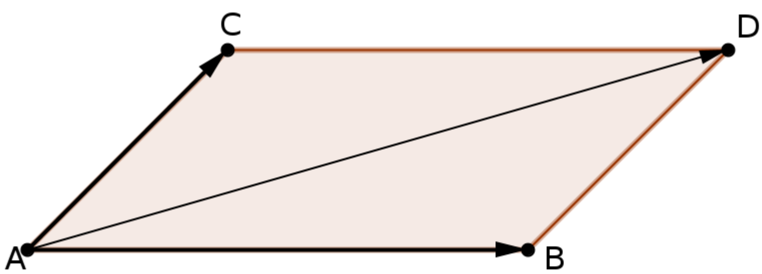
Cette relation fonctionne aussi sur les composantes des vecteurs.
$\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AC}$

Généralisation

Toute opération sur les vecteurs
donne la même opération sur les composantes.
Les vecteurs ont été inventés pour ça !

Règle du parallélogramme

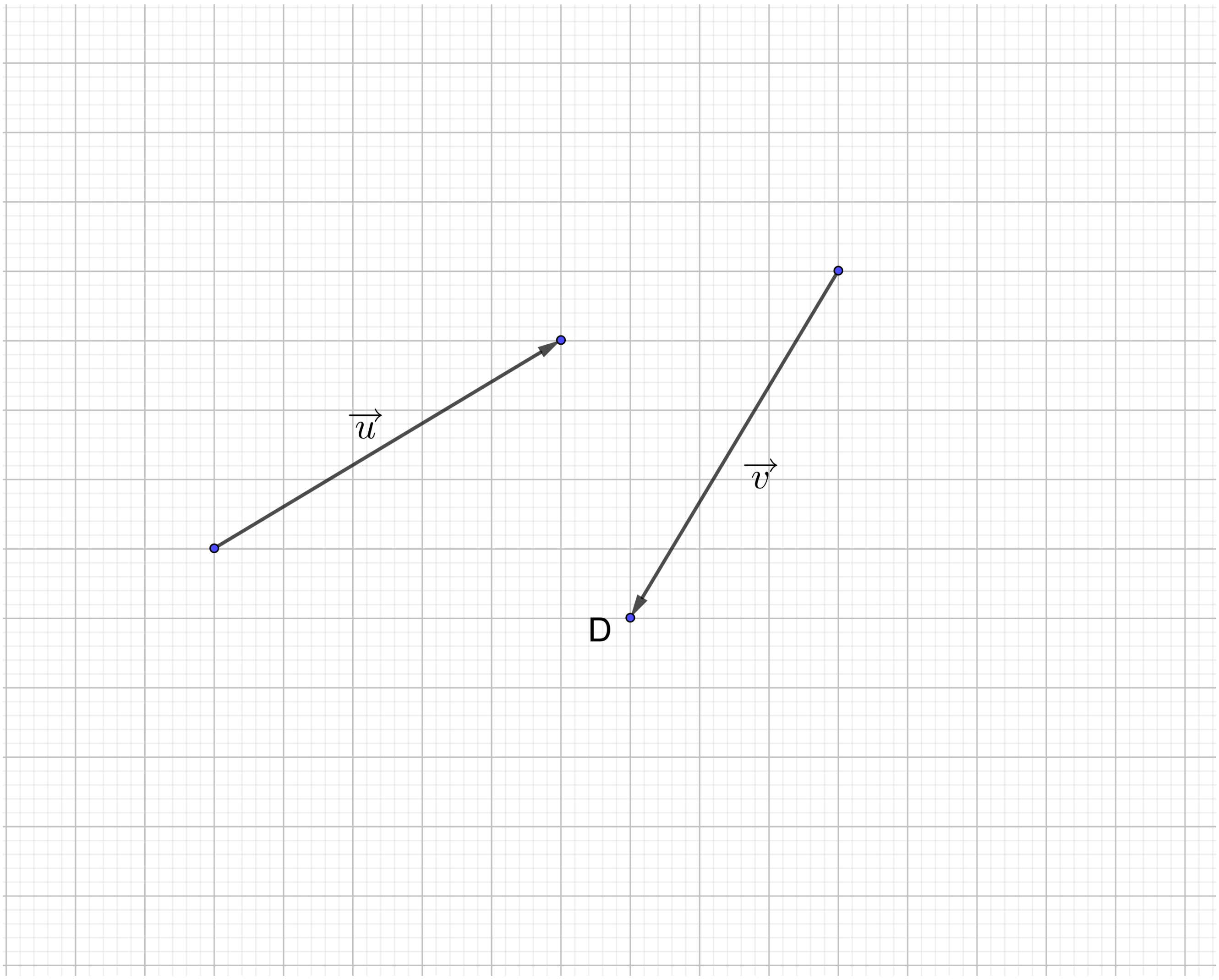
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de même origine,
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D est le quatrième sommet du parallélogramme $ABDC$.



Construction de la somme de 2 vecteurs quelconques

Additionne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Ensuite, additionne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de sorte que la réponse soit un vecteur d'origine D.



Soustraction de deux vecteurs

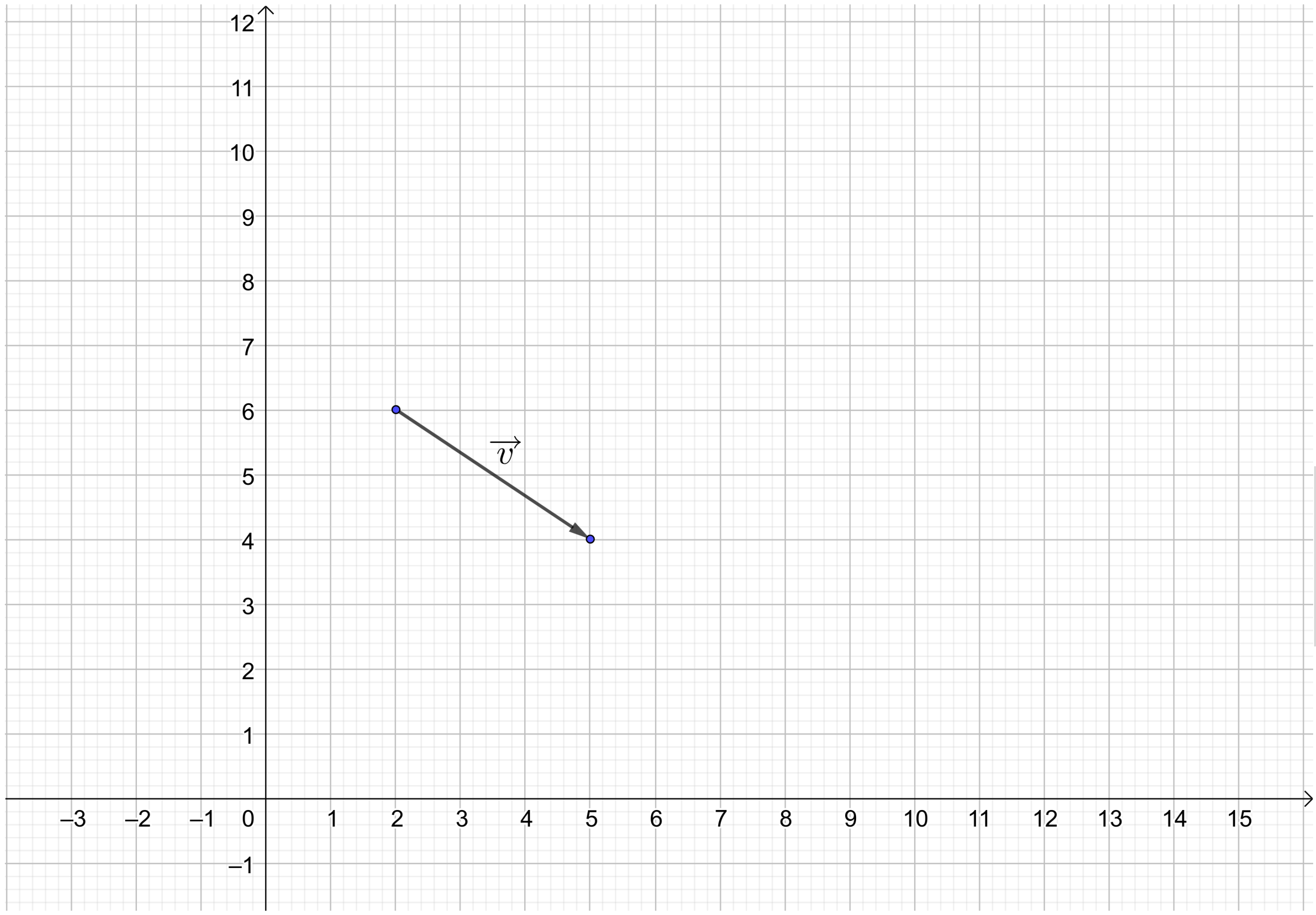
Soustraire un vecteur à un autre revient à lui additionner son opposé.

$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

Multiplication d'un vecteur par un réel

Voici le vecteur $\overrightarrow{v}\,(3;-2)$.



Puisque les opérations sur les vecteurs
donnent les mêmes opérations sur le composantes, nous obtenons

$3\overrightarrow{v}\,(9;-6)$

$-2\overrightarrow{v}\,(-6;\quad)$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{v}\,(\qquad;\qquad)$

Dessine ces vecteurs.

Vecteurs parallèles

Deux vecteurs sont parallèles ssi l'un est multiple de l'autre.

En particulier, le vecteur nul est parallèle à tout vecteur.

Vecteurs parallèles et composantes

Dans un repère du plan, le vecteur $\overrightarrow{u}\,(x_u; y_u)$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{v}\,(x_v; y_v)$ ssi les composantes de l'un sont multiples des composantes de l'autre.

Si les vecteurs sont non nuls, cela revient à dire que leurs composantes sont proportionnelles : $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v} \iff \dfrac{x_u}{y_u} = \dfrac{x_v}{y_v}$.

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(-1; 3)$ et $\overrightarrow{v}\,(2; -6)$ sont parallèles car $\overrightarrow{v} = -2.\overrightarrow{u}$
$(2; -6) = -2.\,(-1; 3)$.

C'est très embêtant.
Il faut trouver un multiple (-2 dans l'exemple) ou diviser des composantes qui pourraient être nulles (dans la formule $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v} \iff \dfrac{x_u}{y_u} = \dfrac{x_v}{y_v}$) !
Rien de plus simple ?

Inspirons-nous de la formule $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v} \iff \dfrac{x_u}{y_u} = \dfrac{x_v}{y_v}$

et écrivons $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u.y_v - x_v.y_u$.

Et bien $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v} \iff \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = 0$, dans tous les cas !

Exemple

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(-1; 3)$ et $\overrightarrow{v}\,(2; -6)$ sont parallèles

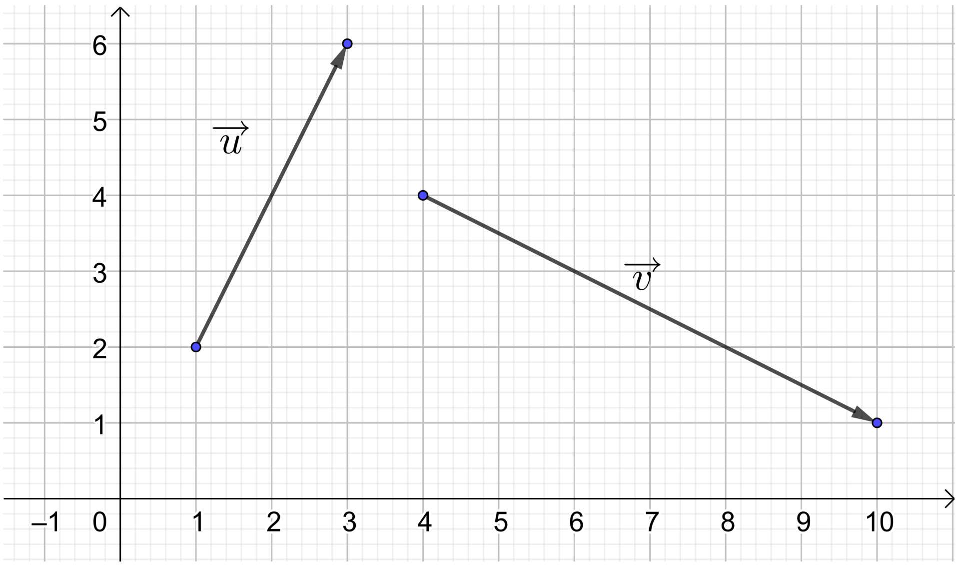
car $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -1.\,(-6) - 2.3 = 0$.

Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions forment un angle droit.

Notation : $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$



Les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(2;4)$ et $\overrightarrow{v}\,(6;-3)$ sont orthogonaux.

En écrivant leurs composantes comme ceci

(pente d'une fonction du premier degré)

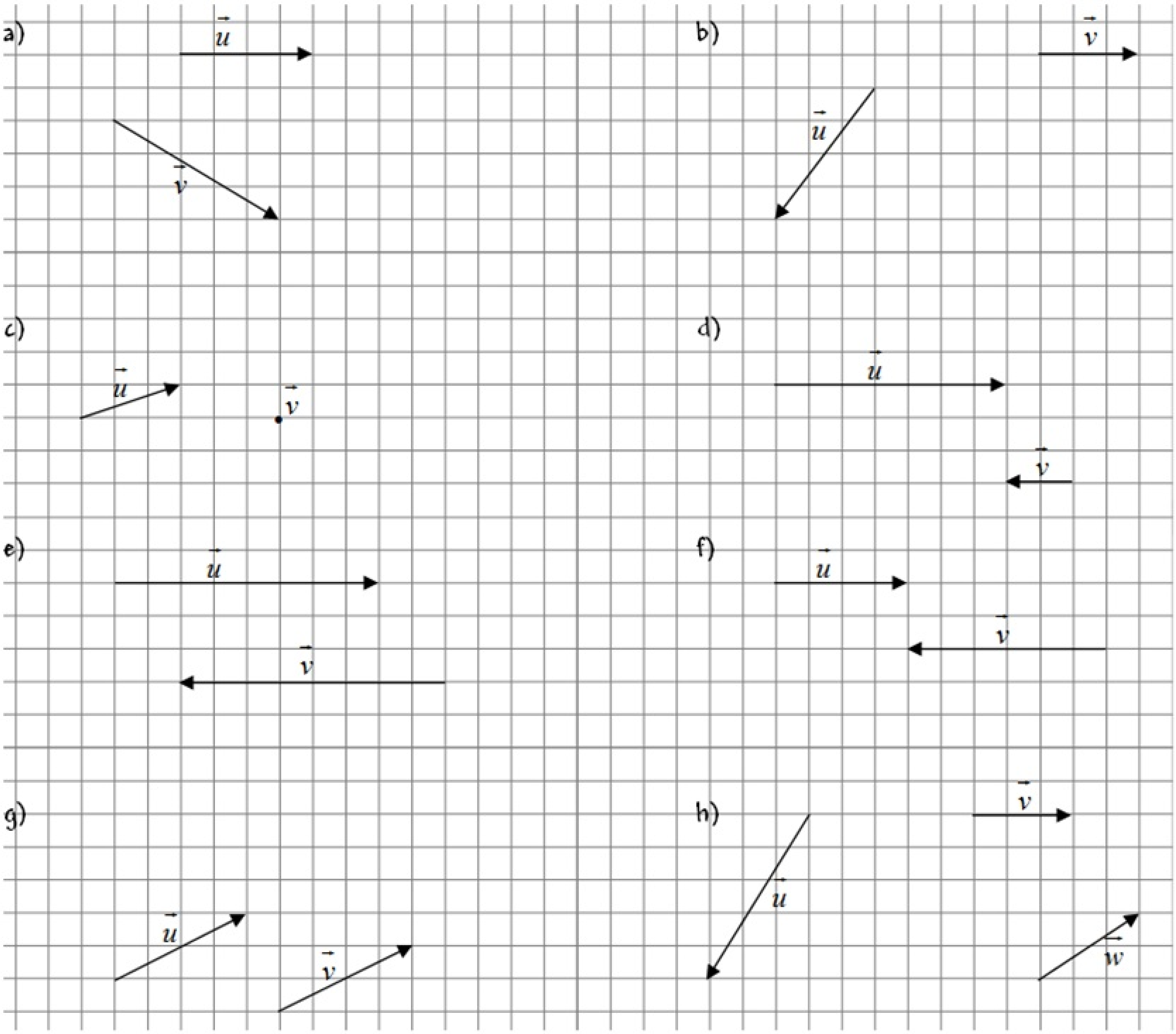
	$\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{v}$
y	4	-3
x	2	6

nous nous apercevons que $4.(-3) + 2.6 = 0$.

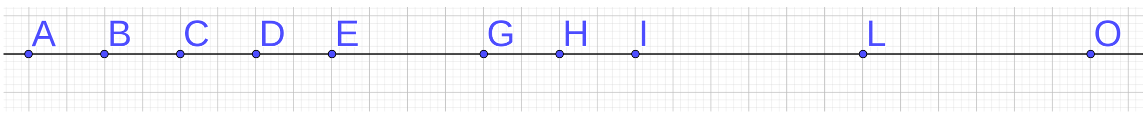
c'est-à-dire $y_u.y_v + x_u.x_v = 0$ ou encore $x_u.x_v + y_u.y_v = 0$

Exercices

1. Additionne les vecteurs qui te sont proposés.



2. Complète les égalités suivantes.



(a) $\overrightarrow{AE} = \qquad \overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{GD} = \qquad \overrightarrow{IO}$

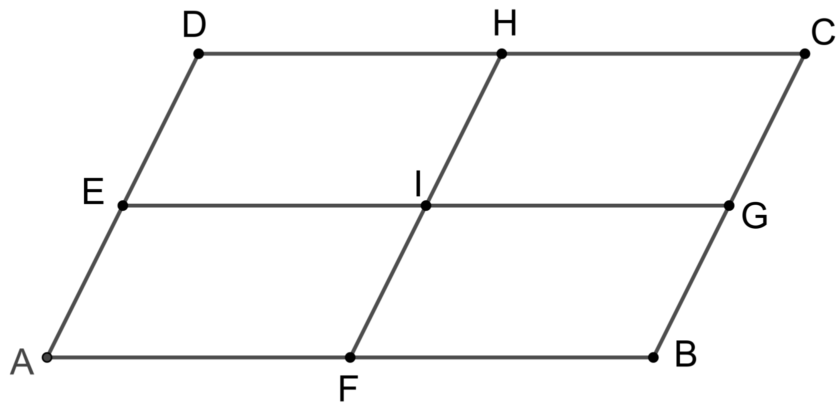
(c) $\overrightarrow{CL} = \qquad \overrightarrow{EB}$

(d) $\overrightarrow{OH} = \qquad \overrightarrow{OE}$

(e) $\overrightarrow{AO} = \qquad \overrightarrow{LG}$

(f) $\overrightarrow{NF} = \qquad \overrightarrow{IE}$

3. Soit $ABCD$ un parallélogramme, F le milieu de $[AB]$, G le milieu de $[BC]$, H le milieu de $[CD]$, E le milieu de $[AD]$ et I l'intersection des médianes.



Construis :

(a) $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{IF}$

(b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CI}$

(c) $\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{BF}$

(d) $\overrightarrow{EI}-\overrightarrow{IA}$

(e) $2\overrightarrow{HC}$

(f) $-2\overrightarrow{ID}$

(g) $\overrightarrow{EI}+2\overrightarrow{BD}$

(h) $2\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DI}$

(i) $3\overrightarrow{HD}-\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{IA}$

(j) $2\overrightarrow{DH}-2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{FB}$

Complète :

(a) $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{C...}=\overrightarrow{D...}$

(b) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{GF}=$

(c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B...}$

(d) $\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{C...}$

(e) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC}=$

(f) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}-\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{HI}=$

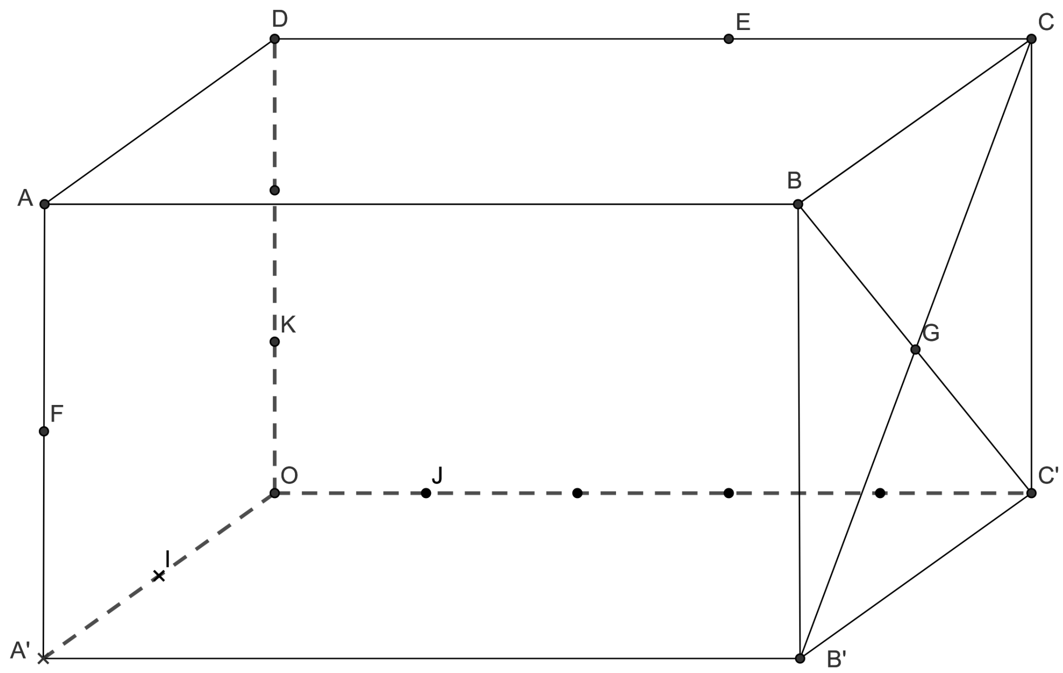
(g) $\overrightarrow{A...}+\overrightarrow{...E}=\overrightarrow{AI}$

(h) $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{HD}-\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A...}$

(i) $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{...I}$

(j) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}=$

4. Complète, à l'aide du parallélépipède rectangle :



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}=$

b) $\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{C'B'}=$

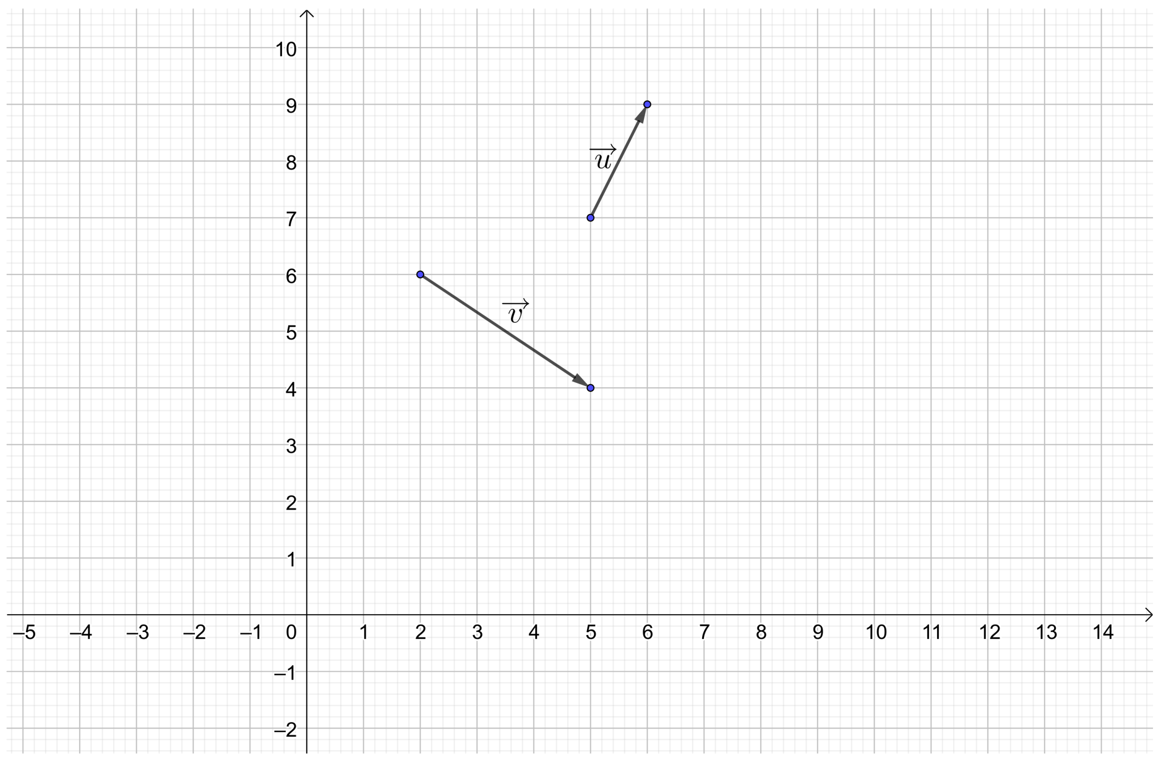
c) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{B'K}=$

d) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GC'}=$

e) $\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{BB'}=$

f) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{DB}=$

5. Détermine les composantes des vecteurs



(a) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

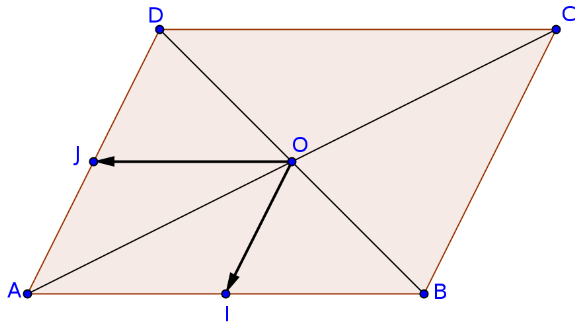
(b) $\overrightarrow{v}-2\overrightarrow{u}$

(c) $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

(d) $5\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$

(e) $\frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{3}{4}\overrightarrow{v}$

6. Dans le parallélogramme $ABCD$, exprime chaque vecteur comme somme de multiples des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.



(a) $\overrightarrow{IA} =$

(b) $\overrightarrow{AB} =$

(c) $\overrightarrow{AJ} =$

(d) $\overrightarrow{BC} =$

(e) $\overrightarrow{OA} =$

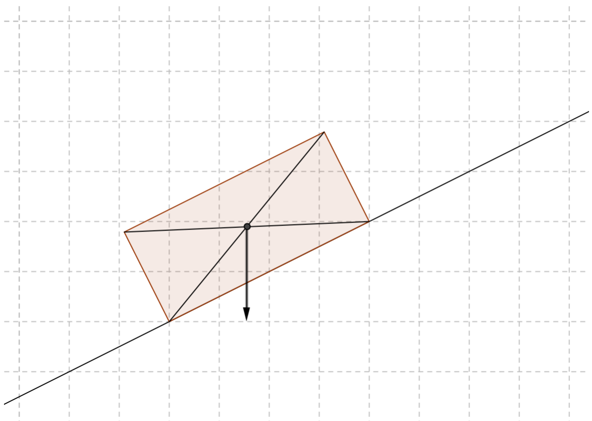
(f) $\overrightarrow{AC} =$

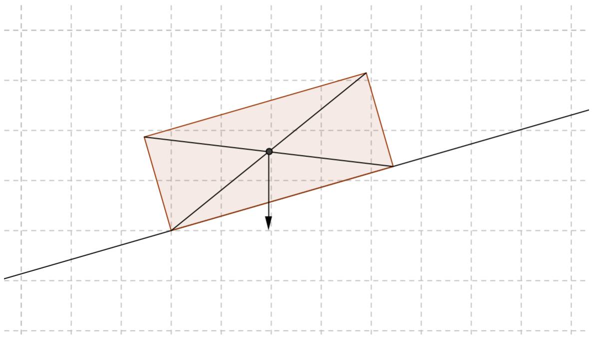
(g) $\overrightarrow{DO} =$

(h) $\overrightarrow{BD} =$

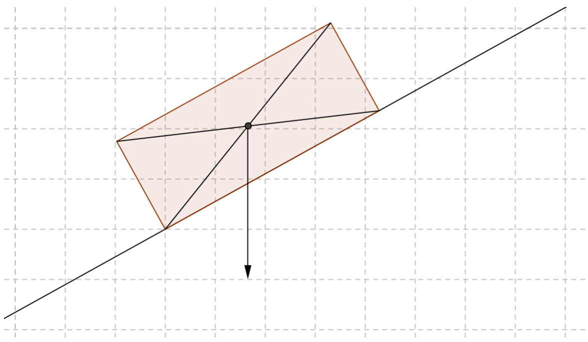
7. Dans chaque figure, un point matériel est prêt à glisser sur un plan incliné. Son poids est indiqué par un vecteur vertical.

Dessine la force (parallèle au plan incliné) à appliquer au point matériel pour qu'il ne glisse pas (et ne remonte pas).

(a) 



(b)

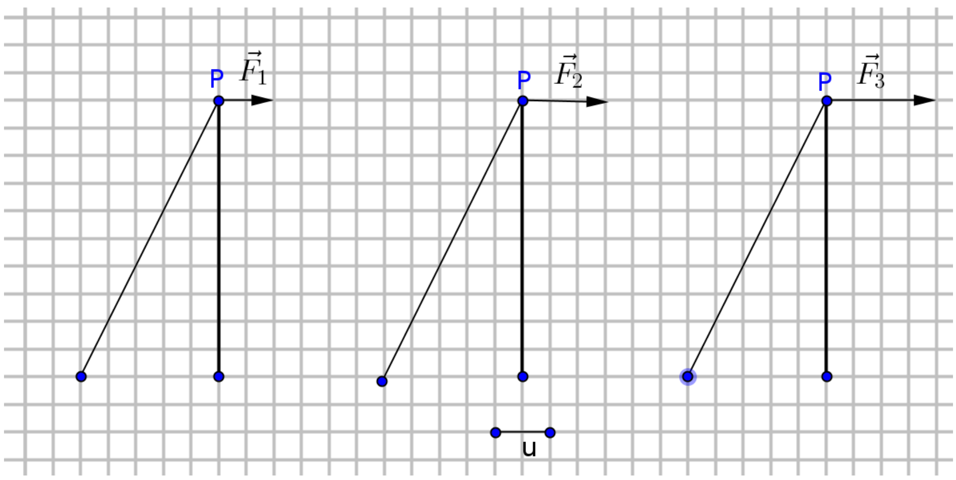


(c)

8. Voici un piquet de ma tonnelle, avec son tendeur.
D'habitude, ce piquet est immobile, ce qui signifie que la somme des forces qui s'exercent en son point supérieur est nulle.
Le vent se lève, exerçant une force $\overrightarrow{F_1}$ au sommet P du piquet.

Le tendeur fait son office et exerce une force pour compenser $\overrightarrow{F_1}$.

Évidemment, cette force s'exerce le long du tendeur.



(a)

(b) Dessine cette force (la force du tendeur), appelée $\overrightarrow{T_1}$, et ensuite la somme de cette force et de $\overrightarrow{F_1}$, appelée $\overrightarrow{S_1}$.

(c) Écris ici la direction et le sens de cette somme, $\overrightarrow{S_1}$.

(d) Deuxième figure : dessine cette force (la force du tendeur), appelée $\overrightarrow{T_2}$, et ensuite la somme de cette force et de $\overrightarrow{F_2}$, appelée $\overrightarrow{S_2}$.

(e) Troisième figure : dessine cette force (la force du tendeur), appelée $\overrightarrow{T_3}$, et ensuite la somme de cette force et de $\overrightarrow{F_3}$, appelée $\overrightarrow{S_3}$.

(f) Sachant que la force maximale que peut exercer le tendeur est de 3 unités, indique dans quel(s) cas la tonnelle s'envolera.

9. Détermine les composantes des vecteurs $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ parallèles au vecteur $\overrightarrow{u}$.

(a) $\overrightarrow{u}\,(1;-2)$ $\quad\overrightarrow{t}\,(\quad;\quad)$ $\quad\overrightarrow{v}\,(-3;\quad)$ $\quad\overrightarrow{w}\left(\quad;\frac{1}{2}\right)$

(b) $\overrightarrow{u}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ $\quad\overrightarrow{t}\,(\quad;\quad)$ $\quad\overrightarrow{v}\,(-3;\quad)$ $\quad\overrightarrow{w}\left(\quad;\frac{1}{2}\right)$

10. Détermine les valeurs que le réel a peut prendre pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient parallèles.

Trace ensuite les deux vecteurs.

(a) $\overrightarrow{u}(5;-4)$ et $\overrightarrow{v}(3;a)$

(b) $\overrightarrow{u}(-5\sqrt{2};a)$ et $\overrightarrow{v}(3\sqrt{2};1)$

(c) $\overrightarrow{u}(-\frac{2}{5};\frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{v}(-\frac{3}{4};a)$

(d) $\overrightarrow{u}(\frac{5}{a};2)$ et $\overrightarrow{v}(\frac{3}{4};\frac{-1}{3a})$

(e) $\overrightarrow{u}(\frac{2}{a};2)$ et $\overrightarrow{v}(\frac{-3a}{4};\frac{-1}{3})$

11. Détermine les composantes des vecteurs $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{u}$.

(a) $\overrightarrow{u}\,(1;-2)$ $\quad\overrightarrow{t}\,(\quad;\quad)$ $\quad\overrightarrow{v}\,(-3;\quad)$ $\quad\overrightarrow{w}\left(\quad;\frac{1}{2}\right)$

(b) $\overrightarrow{u}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ $\quad\overrightarrow{t}\,(\quad;\quad)$ $\quad\overrightarrow{v}\,(-3;\quad)$ $\quad\overrightarrow{w}\left(\quad;\frac{1}{2}\right)$

12. Détermine les valeurs que le réel a peut prendre pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

Trace ensuite les deux vecteurs.

(a) $\overrightarrow{u}(5;-4)$ et $\overrightarrow{v}(3;a)$

(b) $\overrightarrow{u}(-\sqrt{2};a)$ et $\overrightarrow{v}(3\sqrt{2};2)$

(c) $\overrightarrow{u}(-\frac{2}{5};1)$ et $\overrightarrow{v}(-\frac{3}{4};a)$

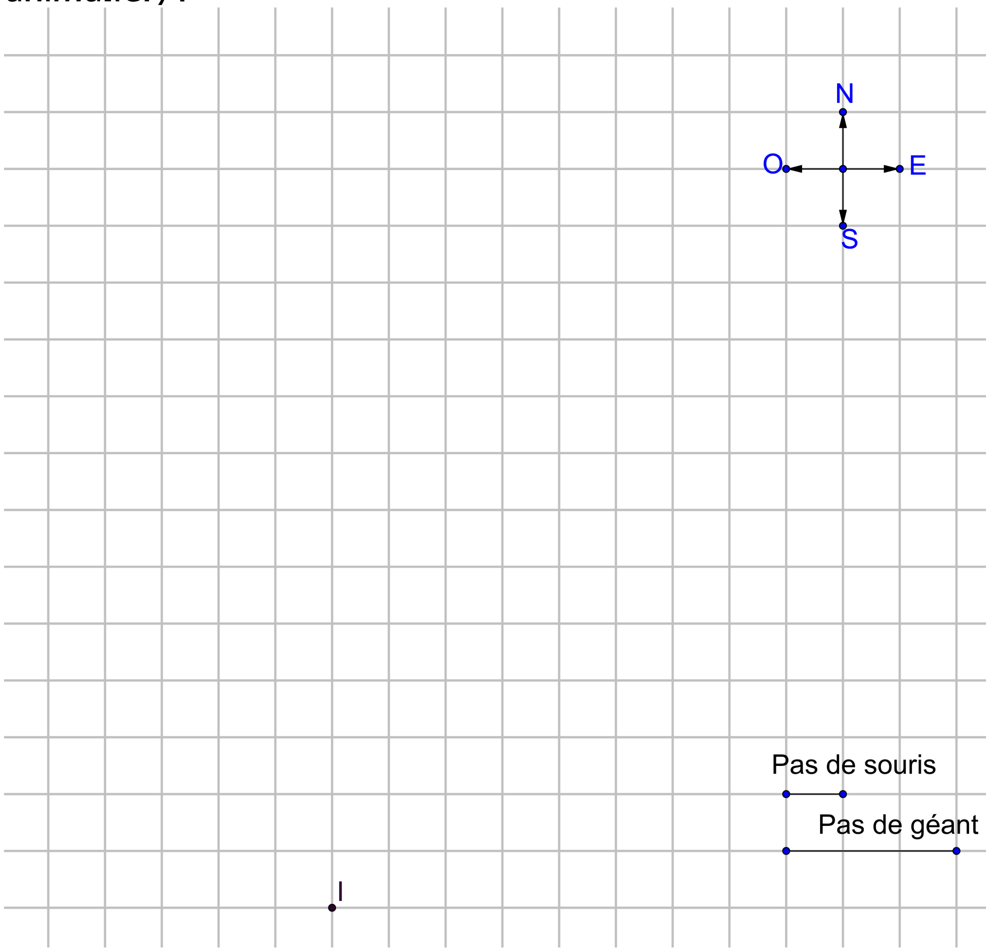
(d) $\overrightarrow{u}(a;2)$ et $\overrightarrow{v}(\frac{-3a}{2};\frac{1}{3})$

13. Le trésor du pirate est enterré dans une île déserte.

    Indiana sait qu'il doit parcourir 3 pas de géant vers le nord, 7 pas de souris vers l'est, puis 3 pas de souris vers le sud et enfin 4 pas de géants vers l'ouest pour y parvenir.

    (a) Où se trouve le trésor ?

    (b) Comment y arriver plus simplement (sur le dessin et en français animalier) ?



14. On donne $A(-4;1)$, $B(5;-2)$, $C(0;-3)$ et $D(-2;4)$.
    Détermine les coordonnées des points

    (a) V tel que $2\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{CD}$

    (b) W tel que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BW} - \overrightarrow{DB}$

    (c) Z tel que $\overrightarrow{ZC} = 2.\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$

    (d) U tel que $2.\left(\overrightarrow{UA} + 3\overrightarrow{BU}\right) = -\overrightarrow{CD}$

    (e) E tel que C soit le milieu de $[AE]$

    (f) F, point symétrique de B par rapport à A.

Pour les exercices qui suivent, fais une figure, écris l'hypothèse, la thèse, puis démontre cette thèse.

15. A partir du parallélogramme $ABCD$, construis M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.

    Démontre que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CM}$.

16. Dans le quadrilatère $ABCD$, on donne les milieux P, Q, R, S de chaque côté.

    Démontre que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

17. Démontre que tout quadrilatère

    dont les diagonales se coupent en leurs milieux est un parallélogramme.

18. Démontre que les diagonales d'un parallélogramme

    se coupent en leur milieu.

19. Soit un parallélogramme $ABCD$ dont O est le point d'intersection des diagonales.

    Démontre que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

20. Dans tout trapèze, le segment qui joint les milieux des côtés reliant les bases est parallèle aux bases et en vaut la demi-somme.

21. Dans tout trapèze, le segment qui joint les milieux des diagonales

    est parallèle aux bases et en vaut la demi-différence.

4

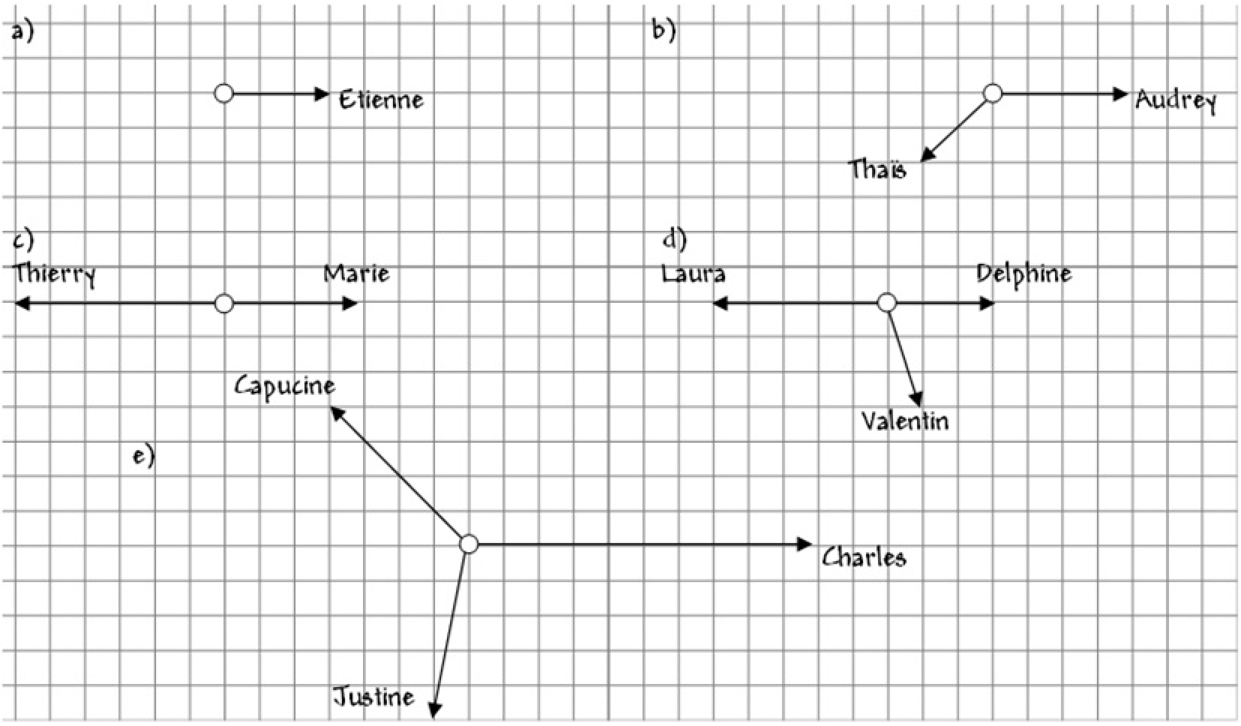
Exercices supplémentaires

1. Sophie joue au paintball. Sa bille devrait se déplacer de A en B.

   Mais le vent est de la partie. Son déplacement est $\overrightarrow{v}$.

   Dessine en rouge le vecteur qui représentera le déplacement réel de la bille.

2. A un mouvement de jeunesse, les chefs ont trouvé un nouveau jeu. Des cordes sont attachées à un anneau central. Les enfants choisissent chacun une corde et tirent dans la direction, le sens et l'intensité indiquée par le dessin. Dans chaque situation, un chef attache une corde à l'anneau et tire avec une certaine force pour immobiliser tout le monde. Dessine cette force supplémentaire. (Utilise le quadrillage).



3. Sophie joue encore au paintball. Mais elle connaît le déplacement $\vec{v}$ du vent.

Dessine en rouge le déplacement qu'elle doit viser pour que sa bille se déplace en B.

4. Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs de $[C;A]$ et $[A;B]$ et G le point d'intersection des médianes $[B;B']$ et $[C;C']$.

Si I est le milieu de $[GB]$ et J le milieu de $[GC]$,

(a) montre que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{C'B'}$. Que peux-tu en conclure ?

(b) Montre que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{BB'}$. Que peux-tu en conclure ?

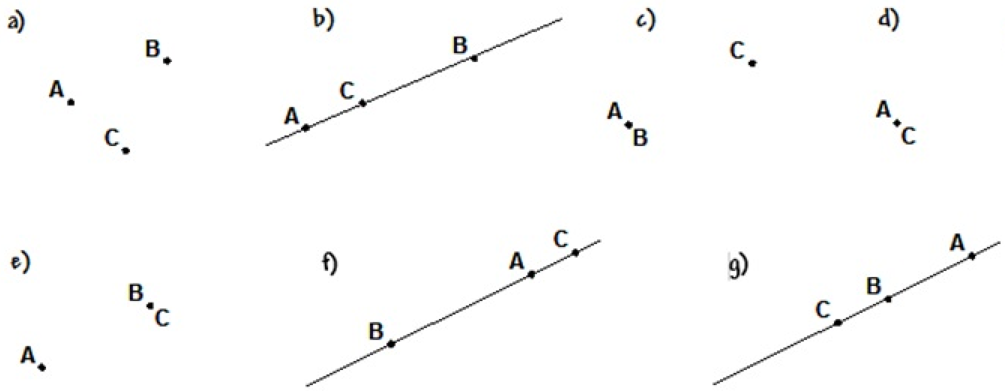
5. Voici les coordonnées de quelques points du plan : $A\,(-2;4)$, $B\,(6;-3)$, $C\,(0;1)$ et $D\,(-1;-4)$.

   (a) Quelles sont les composantes et normes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DB}$?

   (b) Quelles sont les composantes du vecteur $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$?

   (c) Quelles sont les coordonnées du point E pour que $BCAE$ soit un parallélogramme ?

6. Construis le point X sachant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CX}$.



7. Soient dans un repère orthonormé les points $A(3;-2)$, $B(-4;3)$, $C(-1;1)$ et $D(\frac{1}{2};-1)$.

   (a) Calcule les composantes des vecteurs suivants (et les normes des deux derniers) :

      i. $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$

      ii. $\overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{AC}$

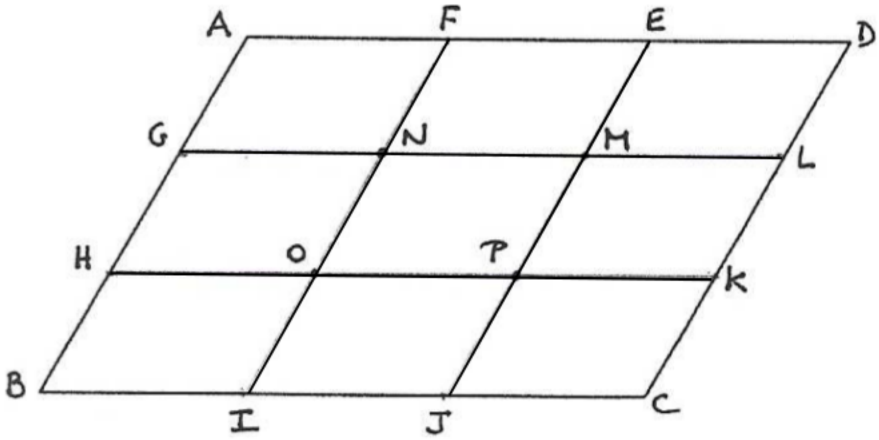
      iii. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}$

      iv. $4\overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB}$

   (b) Détermine les coordonnées de E pour que $CABE$ soit un parallélogramme.

   (c) Détermine les coordonnées du point F pour que $2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CF} = 4\overrightarrow{BA}$.

8. A l'aide de la figure ci-dessous, complète



(a) $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{DL} - \overrightarrow{KP} =$

(b) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ND} - 2\overrightarrow{GH} =$

(c) $2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{FM} + 2\overrightarrow{BI} - 2\overrightarrow{KJ} =$

(d) $\overrightarrow{DJ} - 2\overrightarrow{AN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{...I}$

(e) $\overrightarrow{GP} - 2\overrightarrow{DL} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{O...}$

9. Détermine les valeurs éventuelles du réel a pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient parallèles :

   (a) $\overrightarrow{u}(-4;7)$ et $\overrightarrow{v}(3a;-17)$

   (b) $\overrightarrow{u}(-\frac{1}{4};3a)$ et $\overrightarrow{v}(\frac{2}{3};-\frac{5}{4})$

10. Dans un repère on donne $A(-\frac{1}{3};-4)$, $B(b;-\frac{1}{3})$, $C(c;4)$, $D(\frac{2}{3};-d)$ et $E(1;2)$. Détermine les réels b, c et d tels que les conditions suivantes soient vérifiées simultanément :
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB}\, est\, parallèle\, à\, \overrightarrow{ED} \end{cases}$$

4.3 Équations d'une droite

Incursion

Prenons le point $A\,(-2;1)$ et le vecteur $\overrightarrow{v}\,(3;2)$.

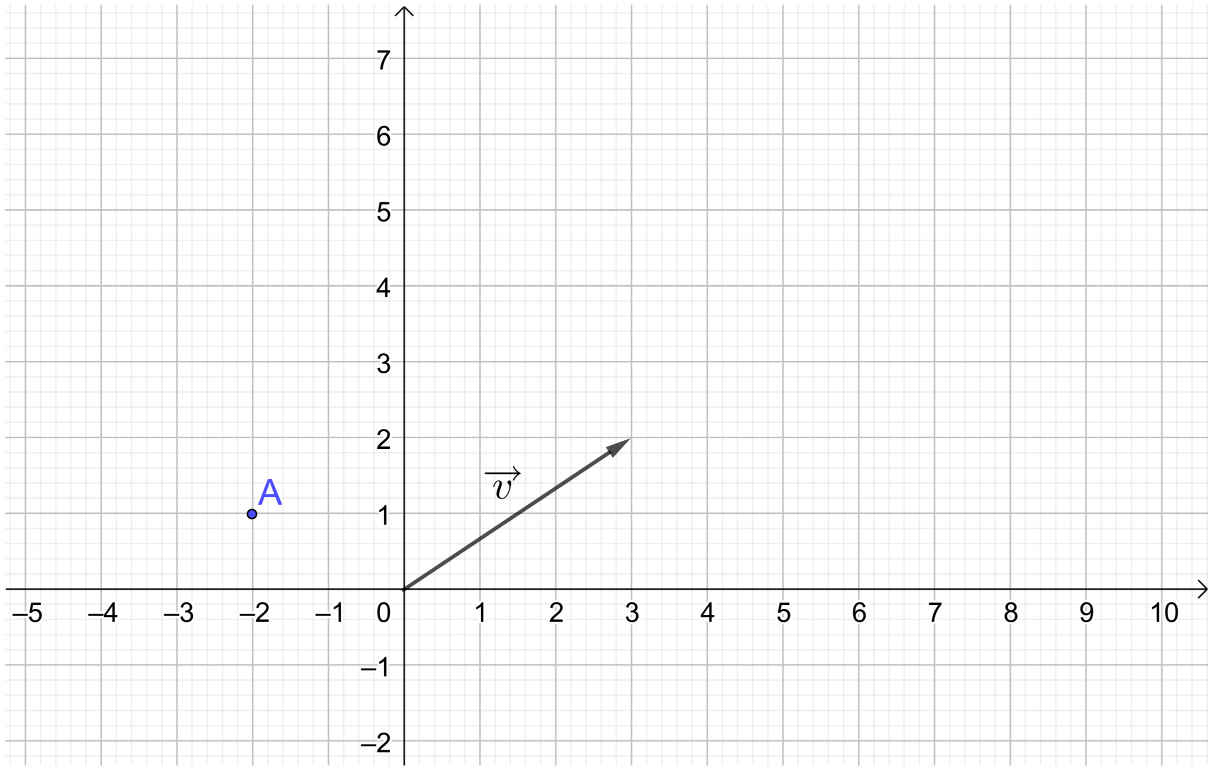
Si nous appliquons le vecteur $\overrightarrow{v}$ au point A nous obtenons le point

Si nous appliquons le vecteur $2\overrightarrow{v}\ (6;4)$ au point A nous obtenons le point

Si nous appliquons le vecteur $3\overrightarrow{v}\ (9;6)$ au point A nous obtenons le point

Si nous appliquons le vecteur $-\overrightarrow{v}\,(-3;-2)$ au point A nous obtenons le point

Si nous appliquons le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}\,\left(\frac{3}{2};1\right)$ au point A nous obtenons le point



Tous ces points sont alignés !

Pourquoi ?

Parce que deux vecteurs multiples sont parallèles, et comme ils ont tous la même origine, leurs extrémités forment une **droite**[2].

Deux vecteurs multiples sont parallèles.
J'adore ça : dans la même phrase, il y a à la fois de l'algèbre (multiples) et de la géométrie (parallèles).
C'est la force des vecteurs.
Des extrémités de vecteurs multiples (de même origine) qui forment une droite : on est entré en géométrie (droite) par la porte de l'algèbre (vecteurs multiples).
C'est magique !

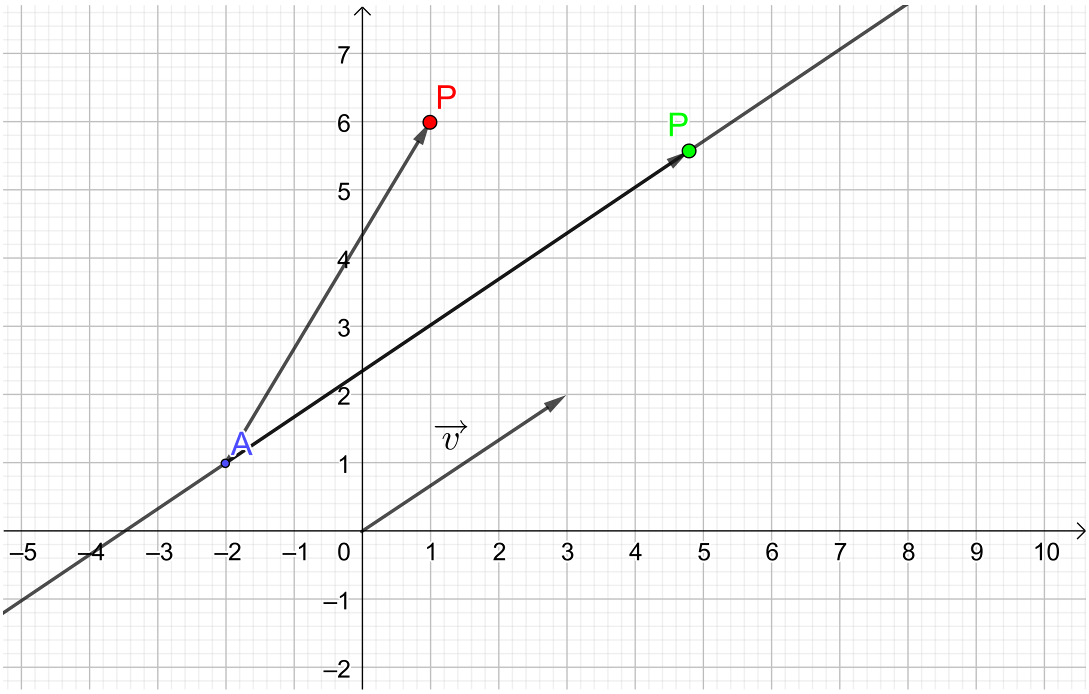
Équation vectorielle d'une droite

Tu viens de tracer une droite à l'aide du point A et du vecteur $\overrightarrow{v}$.

Imagine maintenant un point P qui se promène dans le plan.

Il est possible que ce point appartienne à la droite, ou pas.

[2]Par un point donné, il existe une et une seule droite parallèle à une direction donnée.



4

Le point P vert appartient à la droite.

Le point P rouge n'appartient pas à la droite.

Pour le point qui appartient à la droite, $\overrightarrow{AP}$ est un multiple de $\vec{v}$.

Pour le point qui n'appartient pas à la droite, $\overrightarrow{AP}$ n'est pas un multiple de $\vec{v}$.

Le point P appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AP} = k.\vec{v}$.

$\overrightarrow{AP} = k.\vec{v}$ est une équation vectorielle de la droite. Au départ, A est un point de la droite et le vecteur $\vec{v}$ en donne la direction (vecteur directeur).

Équation paramétrique d'une droite

Reprenons le point $A\,(-2;1)$ et le vecteur $\vec{v}\,(3;2)$ dans le repère donné du plan.

Le point P qui se promène dans le plan a des coordonnées variables, appelées $(x;y)$.

Comme aux opérations sur les vecteurs correspondent les mêmes opérations sur les composantes,

$\overrightarrow{AP} = k.\vec{v}$ devient $(x+2;y-1) = k.(3;2)$

Ce n'est pas pratique de lire la composante avant le ; puis = recommencer dans le membre de droite et faire de même après le ; !

On simplifie : une ligne pour chaque composante !

$$\begin{cases} x+2=3k \\ y-1=2k \end{cases}$$

$\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$ est un système d'équations paramétriques de la droite.
Au départ, $A(x_A; y_A)$ est un point de la droite et le vecteur $\overrightarrow{v}(x_v; y_v)$ en est un vecteur directeur.

Je ne retiens pas la formule des équations paramétriques.
Je retiens celle de l'équation vectorielle
et je remplace les vecteurs par leurs composantes !

Autres exemples

1. Écrivons des équations vectorielles et paramétriques de la droite AB, où $A(3;-1)$ et $B(4;3)$.
   Le vecteur $\overrightarrow{AB}(1;4)$ est un vecteur directeur de la droite AB.
   (a) Équation vectorielle de la droite AB : $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ $(k \in \mathbb{R})$.
   (b) Équations paramétriques de la droite AB : $\begin{cases} x-3=k \\ y+1=4k \end{cases}$
   En donnant n'importe quelle valeur réelle à k, nous obtenons les coordonnées d'un point de la droite AB.
   Par exemple, pour $k = 2$, on a $P(5;7)$ qui est bien un point de la droite.

2. Les points $P(5;-1)$ et $Q(-3;-6)$ appartiennent-ils à la droite dont des équations paramétriques sont $\begin{cases} x-2=-3k \\ y-4=5k \end{cases}$?
   Nous constatons que P appartient à la droite car
   $\begin{cases} 3=-3k \\ -5=5k \end{cases} \iff \begin{cases} k=-1 \\ k=-1 \end{cases} \iff k=-1$.
   Par contre, le point Q n'appartient pas à la droite car
   $\begin{cases} -5=-3k \\ -10=5k \end{cases} \iff \begin{cases} k=\dfrac{5}{3} \\ k=-2 \end{cases}$.
   k ne peut pas être égal à $\dfrac{5}{3}$ et -2 à la fois.

4

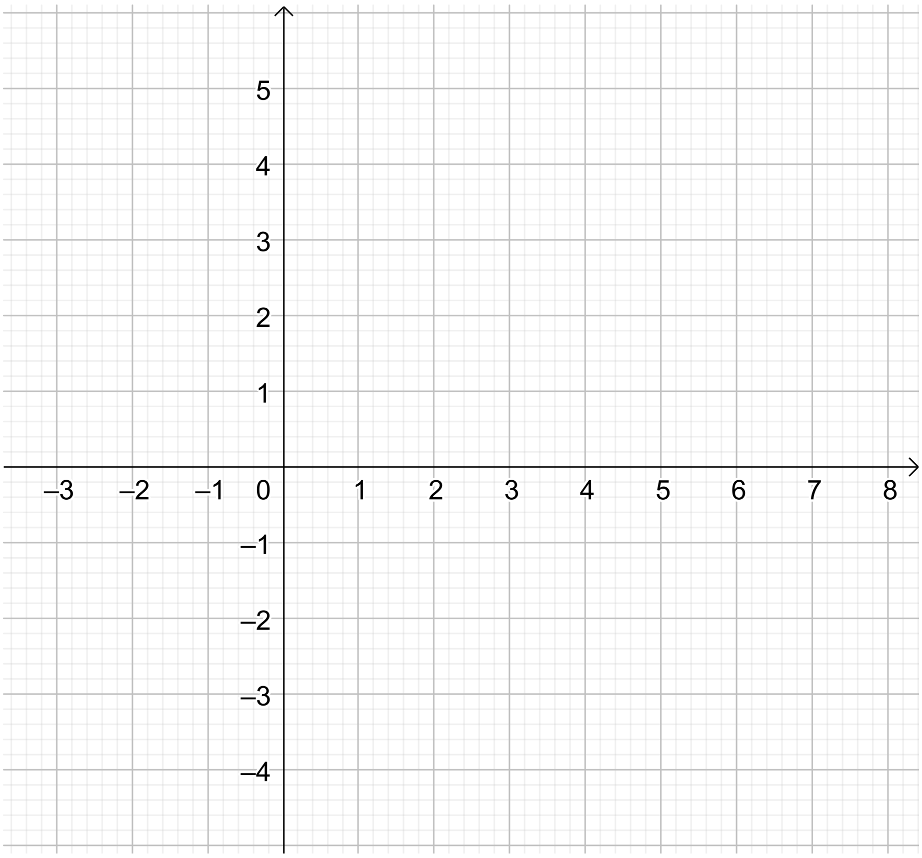
Équation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne d'une droite peut s'obtenir en éliminant le paramètre k du système d'équations paramétriques de cette droite :

$$\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$$

1^{er} cas : droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale)

Trace d_2 passant par $A\,(3;-1)$ et $B\,(3;1)$.



Trace un vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(\quad;\quad)$.

d_2 a comme équations paramétriques :

Ce qui signifie que $x =$ et que y vaut n'importe quoi, ce qui est normal pour une droite verticale !

Une équation cartésienne de cette droite est donc $d_2 \equiv$

Dès que deux points d'une droite ont comme abscisse 3,

tous les points de cette droite ont comme abscisse 3.

Et un point qui n'a pas l'abscisse 3 est ailleurs dans le plan.

Généralisation

Une droite verticale a une équation de la forme

$2^{ème}$ cas : droite non verticale

Trace d passant par $A\,(3;-1)$ et $B\,(1;3)$.
Trace le vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(-2;4)$. Il n'est pas vertical car $-2 \neq 0$.
d a comme équations paramétriques $d \equiv \begin{cases} x-3=-2k \\ y+1=4k \end{cases}$
J'isole k dans la première équation et je substitue dans la seconde.

$$d \equiv \begin{cases} \dfrac{x-3}{-2}=k \\ y+1=4k \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-3}{-2}=k \\ y+1=4.\dfrac{x-3}{-2} \end{cases}$$

La seconde équation me rappelle quelque chose.
J'isole x à droite puis y à gauche.

$$d \equiv \begin{cases} \dfrac{x-3}{-2}=k \\ y+1=\dfrac{4x}{-2}+\dfrac{4.3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-3}{-2}=k \\ y=-2x+5 \end{cases}$$

L'équation cartésienne $y=-2x+5$ est celle d'une fonction du premier degré de pente -2.
Cette équation a la forme $\boxed{y=mx+p}$ avec $m=\dfrac{y_v}{x_v}$.
Nous voici revenu l'année dernière,

avec une fonction du premier degré de pente $m=-2$.

Méthode rapide

Il est possible d'établir rapidement une équation cartésienne de la droite en utilisant le parallélisme des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{v}$.
Un point du plan appartient à la droite ssi ces vecteurs sont parallèles, c'est-à-dire si leur déterminant est nul.

Exemple

La droite contient le point $A\,(2;-1)$ et a comme vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(3;4)$.

4

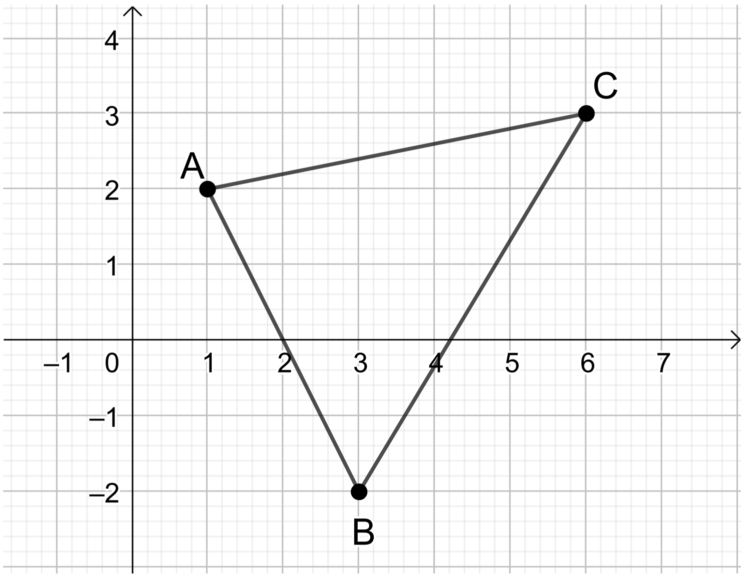
$\overrightarrow{AP}\,(x-2; y+1)$

L'équation s'écrit $\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y+1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

c'est-à-dire $4\,(x-2) - 3\,(y+1) = 0 \iff 4x - 3y - 11 = 0$

Exercices

1. Pour chaque côté du triangle ABC



   (a) Détermine une équation vectorielle

   (b) un vecteur directeur

   (c) un système d'équations paramétriques

   (d) sa pente

   (e) une équation cartésienne.

2. Détermine un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne de la droite contenant les points suivants :

   (a) $A(2;1)$ et $B(-1;-5)$

   (b) $A(-1;1)$ et $B(1;2)$

   (c) $A(2;4)$ et $B(0;4)$.

3. Dans chacun des cas, détermine une équation cartésienne de la droite d

   (a) passant par $A(1;-4)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{v}(1;-3)$ comme vecteur directeur

(b) passant par $B(3;5)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{v}(0;3)$ comme vecteur directeur

(c) passant par $C(0;2)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{v}(-6;0)$ comme vecteur directeur

(d) passant par les points $A(2;-5)$ et $B(3;1)$

(e) passant par les points $A(4;-2)$ et $B(8;-2)$

(f) passant par les points $A(3;-2)$ et $B(3;7)$.

4. Soit la droite $d \equiv \begin{cases} x = 3k - 1 \\ y = -5k + 3 \end{cases}$

(a) Détermine les coordonnées du point A appartenant à la droite d sachant que $k = 0$.

(b) Détermine les coordonnées du point B appartenant à la droite d sachant que $k = 1$.

(c) Donne les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.

(d) Détermine, pour chacun des points de cette droite donnés ci-après, les coordonnées complètes :

i. $C\,(m;-4)$

ii. $D\left(\dfrac{3}{8};m\right)$

5. Soit la droite d passant par $A(2;-4)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}(-3;1)$ comme vecteur directeur.

(a) Détermine un système d'équations paramétriques de la droite d.

(b) Les points $B(-4;-2)$ et $C(4;3)$ appartiennent-ils à d ?

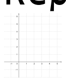
(c) Utilise le point B pour déterminer un autre système d'équations paramétriques de la droite d.

6. Dans un repère du plan, on considère les points $A\,(4;1)$ et $B\,(4;-2)$.

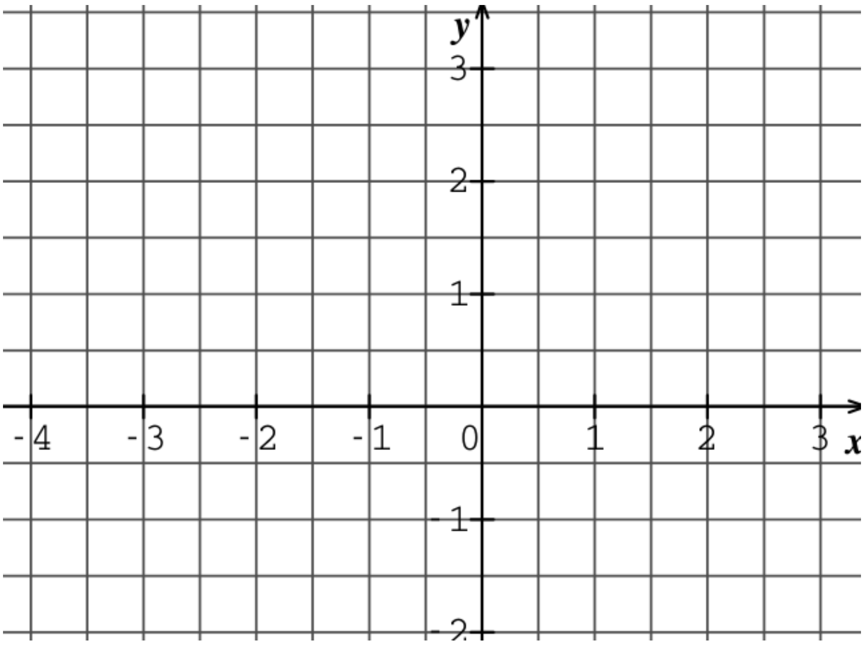
(a) Détermine des équations paramétriques de la droite d passant par ces deux points.

(b) Détermine deux autres points de la droite d.

(c) Représente la droite d.



7. Trace et donne la pente des droites suivantes (aide-toi d'un vecteur directeur) :



(a) d_1 passant par $A(1;0)$ et $B(2;3)$

(b) d_2 passant par $C(-1;-2)$ et $D(-3;2)$

(c) d_3 passant par $E(-1;3)$ et $F(3;3)$

(d) d_4 passant par $G(-4;0)$ et $H(-4;-1)$.

8. Détermine une équation cartésienne des droites suivantes :

(a) d_1 de coefficient directeur (pente) 2 et passant par le point $A(-1;3)$

(b) d_2 passant par le point $B(1;-2)$ et de coefficient directeur $-\dfrac{2}{3}$

(c) d_3 passant par le point $C(-6;5)$ et dont le coefficient directeur (pente) n'existe pas

(d) d_4 passant par le point $D(-1;-2)$ et de coefficient directeur 0

(e) d_5 passant par les points $E(0;0)$ et $E'(1;-2)$

(f) d_6 passant par les points $G(-1;2)$ et $G'(-1;5)$

(g) d_7 passant par les points $H(-1;4)$ et $H'(0;5)$

(h) d_8 passant par les points $I(4;-6)$ et $I'(2;-6)$.

9. Indique si les points suivants sont alignés ou non.

(a) $A(-1;-6)$, $B(5;6)$ et $C(3;2)$

(b) $A(0;1)$, $B(2;3)$ et $C(3;-1)$

(c) $A(-2;-5)$, $B(0;-5)$ et $C(3;-5)$

10. Détermine des équations paramétriques de la droite

(a) d passant par $A(2;3)$ et $B\,(-2;4)$

(b) d' parallèle à d et passant par le point $C\,(-5;6)$.

11. Soit la droite d définie par le système d'équations paramétriques $d \equiv \begin{cases} x = 2k-3 \\ y = -k+5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$.

    (a) Détermine un point et un vecteur directeur de d.

    (b) Détermine les points d'intersection de la droite d avec les axes de coordonnées.

    (c) Détermine un système d'équations paramétriques de la droite $d\prime$ perpendiculaire à d passant par le point $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

    (d) Détermine une équation cartésienne de d et $d\prime$, à partir de leurs systèmes d'équations paramétriques.

    (e) Détermine le point d'intersection entre les droites d et $d\prime$.

12. Trouve le coefficient directeur (pente) des droites suivantes puis indique si elles sont verticales, horizontales, croissantes ou décroissantes.

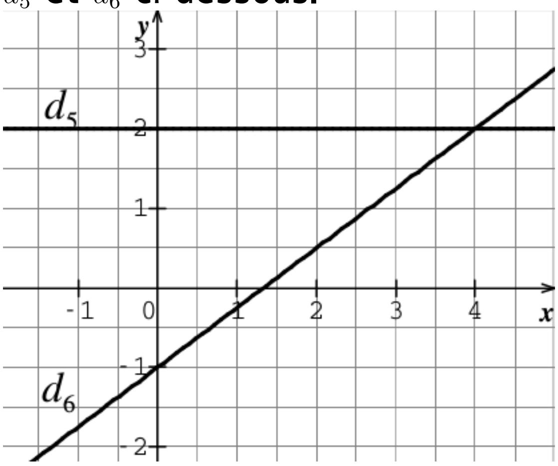
    (a) $d_1 \equiv y = -4x + 2$

    (b) $d_2 \equiv 3x - 4y + 5 = 0$

    (c) d_3 passant par $A(-3;-2)$ et $B(1;4)$

    (d) d_4 passant par $A(-2;-4)$ et $B(-2;3)$

    (e) d_5 et d_6 ci-dessous.



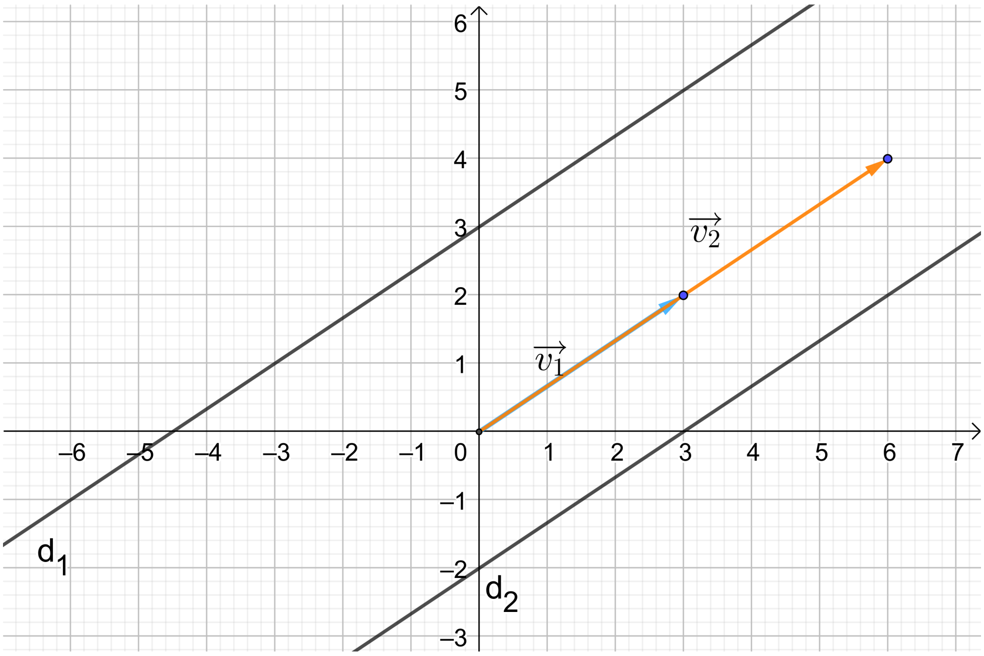
13. Indique si $A(-1;5)$, $B(3;2)$ et $C(-5;8)$ sont alignés ou non.

4

4.4 Droites parallèles ou perpendiculaires

Droites parallèles

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même vecteur directeur.



$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 3k \\ y - 3 = 2k \end{cases}$$

$$d_2 \equiv \begin{cases} x = 6k \\ y + 2 = 4k \end{cases}$$

$\overrightarrow{v_1}\,(3;2)$

$\overrightarrow{v_2}\,(6;4)$

Dans les équations, les vecteurs directeurs sont multiples (donc parallèles) : $\overrightarrow{v_2} = 2.\overrightarrow{v_1}$.

C'eut été plus simple de prendre $\overrightarrow{v_1}$ pour les deux droites.

En mathématiques, avoir le même direction
et être parallèles,
c'est la même chose !

Et si les droites sont données par des équations cartésiennes ?

$d_1 \equiv y = \frac{3}{2}x + 3 \qquad m_1 = \frac{3}{2}$

$d_2 \equiv y = \frac{3}{2}x - 2 \qquad m_2 = \frac{3}{2}$

Elles ont la même pente !

Et si les équations sont canoniques ?

$d_1 \equiv 3x - 2y + 6 = 0$

$d_2 \equiv 3x - 2y - 4 = 0$

Isole y pour trouver la pente.

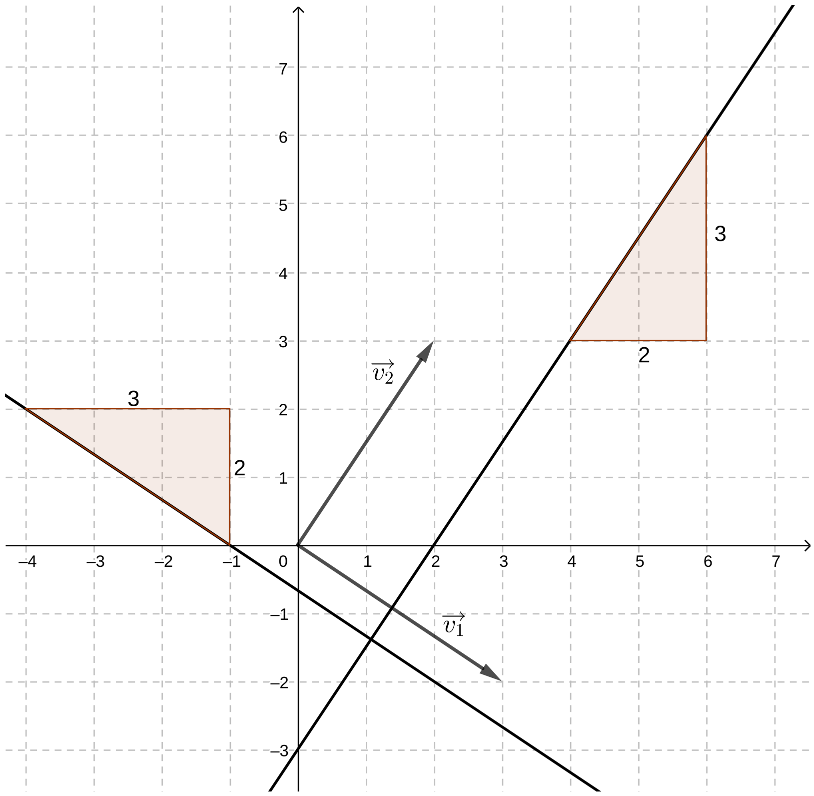
Droites perpendiculaires

Dans le plan, deux droites sont parallèles ou sécantes (un point commun) et, dans le cas où elles sont sécantes, elles peuvent être perpendiculaires ou obliques.

En résumé :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \text{obliques} \\
 & & & \nearrow & \\
 & & \text{sécantes} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & \text{perpendiculaires} \\
\text{2 droites} & & & & \\
 & & & & \text{distinctes} \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \text{parallèles} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & \text{confondues}
\end{array}$$

Deux droites sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.



$\vec{v_1}\,(3;-2)$

$\vec{v_2}\,(2;3)$

$x_{v1}.x_{v2} + y_{v1}.y_{v2} = 3.2 + (-2)\,.3 = 0$

Les pentes ne sont pas quelconques.

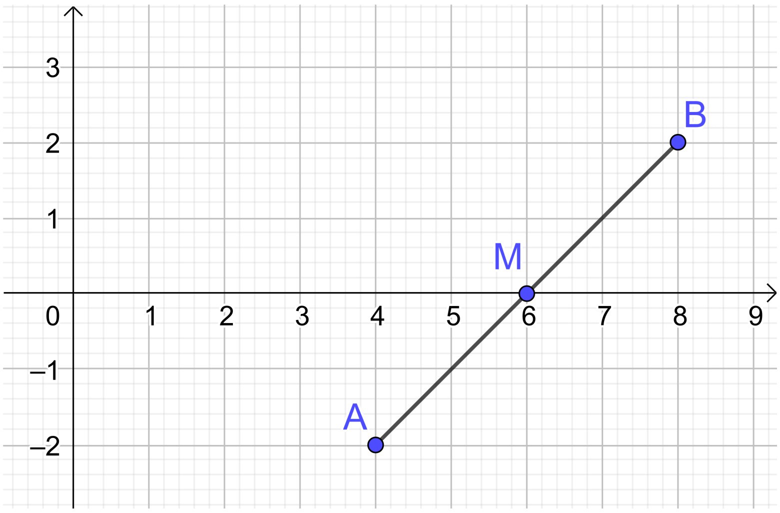
$m_1 = \frac{-2}{3}$

$m_2 = \frac{3}{2}$

C'est l'inverse de l'opposé : $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

Milieu d'un segment

$A(4;-2)$ et $B(8;2)$



Le milieu du segment $[AB]$ est $M(6;0)$.

Pourquoi ?

Commence par x : le milieu de 4 et 8 est 6.

Pour y ; le milieu de -2 et 2 est 0.

Détermine le milieu du segment $[AB]$

lorsque $A(8;-2)$ et $B(12;4)$

lorsque $A(8;-2)$ et $B(2;3)$

Cela se complique !

Il existe une formule : $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Intersection de deux droites

Rappels

• Lorsque l'équation $ax+by+c=0$ est vraie, le point $P(x;y)$ appartient à la droite.

Lorsque l'équation $ax+by+c=0$ est fausse, le point $P(x;y)$ est ailleurs dans le plan.

• Deux droites du plan sont parallèles ou sécantes.

4

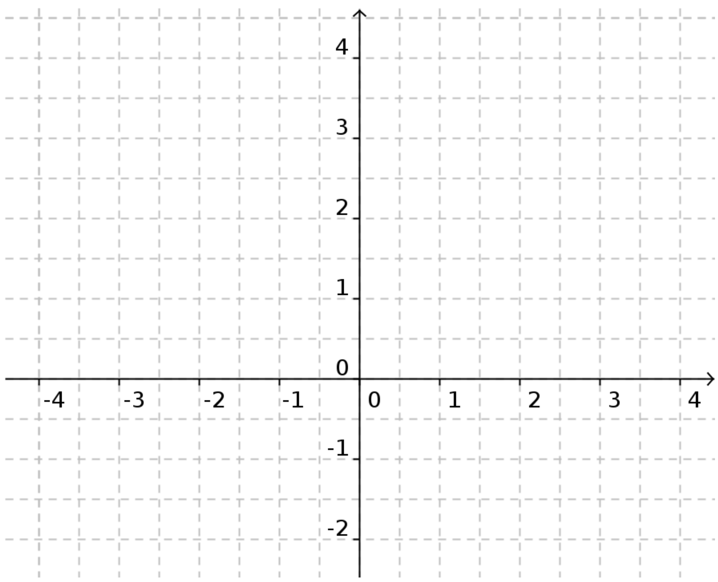
Exemple

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Lorsque $2x + y - 3 = 0$ est vrai, la point $P(x;y)$ appartient à la première droite et lorsque $3x - 2y + 1 = 0$ est vrai, la point $P(x;y)$ appartient à la seconde droite.

Un tel point est donc un point *commun* aux deux droites, un point *d'intersection* des deux droites.

Graphiquement



Par calcul

Détermine le point commun par la méthode des combinaisons.

Exercices

1. Détermine un système d'équations paramétriques de la droite
   (a) d contenant les points $A(2,3)$ et $B(1,-1)$.
   (b) d_1 contenant le point $C(-1;2)$ et parallèle à d.
   (c) d_2 contenant le point $D(-2,0)$ et perpendiculaire à d.
2. Détermine une équation cartésienne de chacune des droites suivantes.
   (a) d_1 passant par $A(0;0)$ et parallèle à la droite $d \equiv y = -\frac{1}{2}x + 3$
   (b) d_2 passant par $B(3;4)$ et parallèle à la droite $d \equiv y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}$
   (c) d_3 passant par $C(2;-1)$ et parallèle à la droite $d \equiv 6x + 3y = 1$
   (d) d_4 passant par $D(-1;2)$ et parallèle à la droite $d \equiv y = -5$
   (e) d_5 passant par $E(-7;5)$ et parallèle à la droite $d \equiv x = 1$
   (f) d_6 passant par $F(-3;2)$ et parallèle à la droite d contenant les points $M(1;3)$ et $N(-2;4)$
   (g) d_7 passant par $G(-3;2)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv y = \frac{x}{5} + 1$
   (h) d_8 passant par $H(0;0)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv y = 3x - 5$
   (i) d_9 passant par $I(0;-1)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv 4x - 7y + 7 = 0$
   (j) d_{10} passant par $J(5;1)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv 5y - 1 = 0$
   (k) d_{11} passant par $K(0;3)$ et perpendiculaire à la droite d contenant les points $M(1;6)$ et $N(2;-4)$
   (l) d_{12} passant par $L(-1;2)$ et perpendiculaire à la droite d contenant les points $M(6;3)$ et $N(6;7)$

3. Établis les correspondances entre les deux colonnes ci-dessous (il y en a exactement 10).

1) la droite d'équation $y = 3x - 1$	A) est parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 1$
2) la droite d'équation $y = -2x$	B) est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$
3) la droite d'équation $y = 6$	C) est croissante
4) la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x + 3$	D) passe par $(0; 0)$
	E) est parallèle à l'axe des abscisses
	F) est parallèle à la droite d'équation $y = -2$
	G) est décroissante
	H) a comme pente 3
	I) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = -4x - 1$

4. Calcule la valeur de a pour que les droites d_1 et d_2 soient parallèles lorsque $d_1 \equiv ax + y - 5 = 0$ et $d_2 \equiv ax + 2y = x + 2$.

5. Calcule la valeur de a pour que les droites d_1 et d_2 soient perpendiculaires lorsque $d_1 \equiv 2ax + (a - 3)\, y + 1 = 0$ et $d_2 \equiv ax + y - 3 = 0$.

6. Trouve, graphiquement et par calcul, l'éventuel point d'intersection des droites :

   (a) $d_1 \equiv 6x + 4y - 5 = 0$ et $d_2 \equiv 2x + 3y + 5 = 0$

   (b) $d_1 \equiv 7x + 4y + 1 = 0$ et $d_2 \equiv -x + 3y + 7 = 0$

   (c) $d_1 \equiv -10x + 5y - 4 = 0$ et $d_2 \equiv 2x - y - 9 = 0$

7. Voici les équations cartésiennes de 4 droites a, b, c et d.
   $a \equiv \frac{1}{2}x - y + 5 = 0$
   $b \equiv x - 2y - 15 = 0$
   $c \equiv 4x + 2y - 15 = 0$
   $d \equiv 2x + y + 5 = 0$

   (a) Réécris chacune de ces équations sous la forme $y = mx+p$. Détermine la valeur de m et de p correspondant à chacune de ces équations.

   (b) Construis dans un repère orthonormé (1 cm = 1 unité) chacune de ces droites en déterminant les coordonnées de plusieurs points.

   (c) Examine la figure formée par les droites a, b, c et d. Quelle est la nature de cette figure ? Justifie ton affirmation.

(d) Calcule, par système, les coordonnées des éventuels points d'intersection des droites a, b, c et d. Nomme chacun de ces points.

(e) Donne une équation de chacune des diagonales de la figure formée par les points d'intersection des droites a, b, c et d.

(f) Détermine, par système, les coordonnées du point d'intersection de ces diagonales.

8. Détermine les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$. Détermine ensuite les coordonnées d'un autre point de la droite AB.

   (a) $A(3;-5)$ et $B(2;-1)$

   (b) $A(2;7)$ et $B(2;-4)$

   (c) $A(2;-5)$ et $B(-2;5)$

   (d) $A(\frac{1}{2};\frac{1}{3})$ et $B(\frac{3}{4};-\frac{2}{3})$

9. Rechercher une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ lorsque

   (a) $A(3;-5)$ et $B(2;-1)$

   (b) $A(2;7)$ et $B(2;-4)$

   (c) $A(2;-5)$ et $B(-2;5)$

   (d) $A(\frac{1}{2};\frac{1}{3})$ et $B(\frac{3}{4};-\frac{2}{3})$

10. Le triangle $A(-5;3)$ $B(-1;1)$ $C(-3;-5)$

   (a) Représente ce triangle.

   Appelle C' le milieu de $[AB]$, A' le milieu de $[BC]$ et B' le milieu de $[CA]$.

   (b) Détermine une équation cartésienne

   de chaque médiatrice du triangle.

   Représente-les.

   (c) Détermine le point d'intersection de ces médiatrices (centre du cercle circonscrit).

   (d) Détermine une équation cartésienne de chaque hauteur du triangle.

   Représente-les.

   (e) Détermine le point d'intersection de ces hauteurs (orthocentre).

   (f) Détermine une équation cartésienne de chaque médiane du triangle.

   (g) Détermine le point d'intersection de ces médianes (centre de gravité).

11. Détermine une équation cartésienne des droites suivantes.

   (a) a de coefficient directeur $-\frac{2}{5}$ et passant par $A(-4;1)$
   (b) b passant par les points $B(-1;3)$ et $B'(5;-3)$
   (c) c passant par les points $C(4;-1)$ et $C'(2;-1)$
   (d) d passant par $D(3;-2)$ et parallèle à la droite $d' \equiv y = -3x - 1$
   (e) e passant par $E(5;4)$ et parallèle à $e' \equiv 3x - 2y = 0$
   (f) f passant par $F(0;-3)$ et parallèle à f' passant par les points $M(-3;-2)$ et $N(5;-1)$
   (g) g passant par $G(2;1)$ et parallèle à la droite $g' \equiv 3x + 4 = 0$
   (h) h passant par $H(-3;2)$ et perpendiculaire à la droite $h' \equiv y = \frac{x}{5} + 1$
   (i) i passant par $I(0;-1)$ et perpendiculaire à la droite $i' \equiv 4x - 7y + 7 = 0$
   (j) j passant par $J(0;0)$ et perpendiculaire à la droite j' passant par les points $M(1;-2)$ et $N(-1;-8)$
   (k) k passant par $K(4;-5)$ et perpendiculaire à la droite $k' \equiv x + 3 = 0$
   (l) l passant par $L(10;12)$ et perpendiculaire à la droite l' ayant comme pente 0.

12. Trouve graphiquement, puis par calcul, l'éventuel point d'intersection des droites suivantes.

   (a) $d_1 \equiv y = -3x + 2$ et $d_2 \equiv y = 5x - 3$
   (b) $d_3 \equiv 2x - 5y + 3 = 0$ et $d_4 \equiv 4x + 3y - 1 = 0$
   (c) $d_5 \equiv -4x + 6y - 1 = 0$ et $d_6 \equiv 3y = 2x - 15$

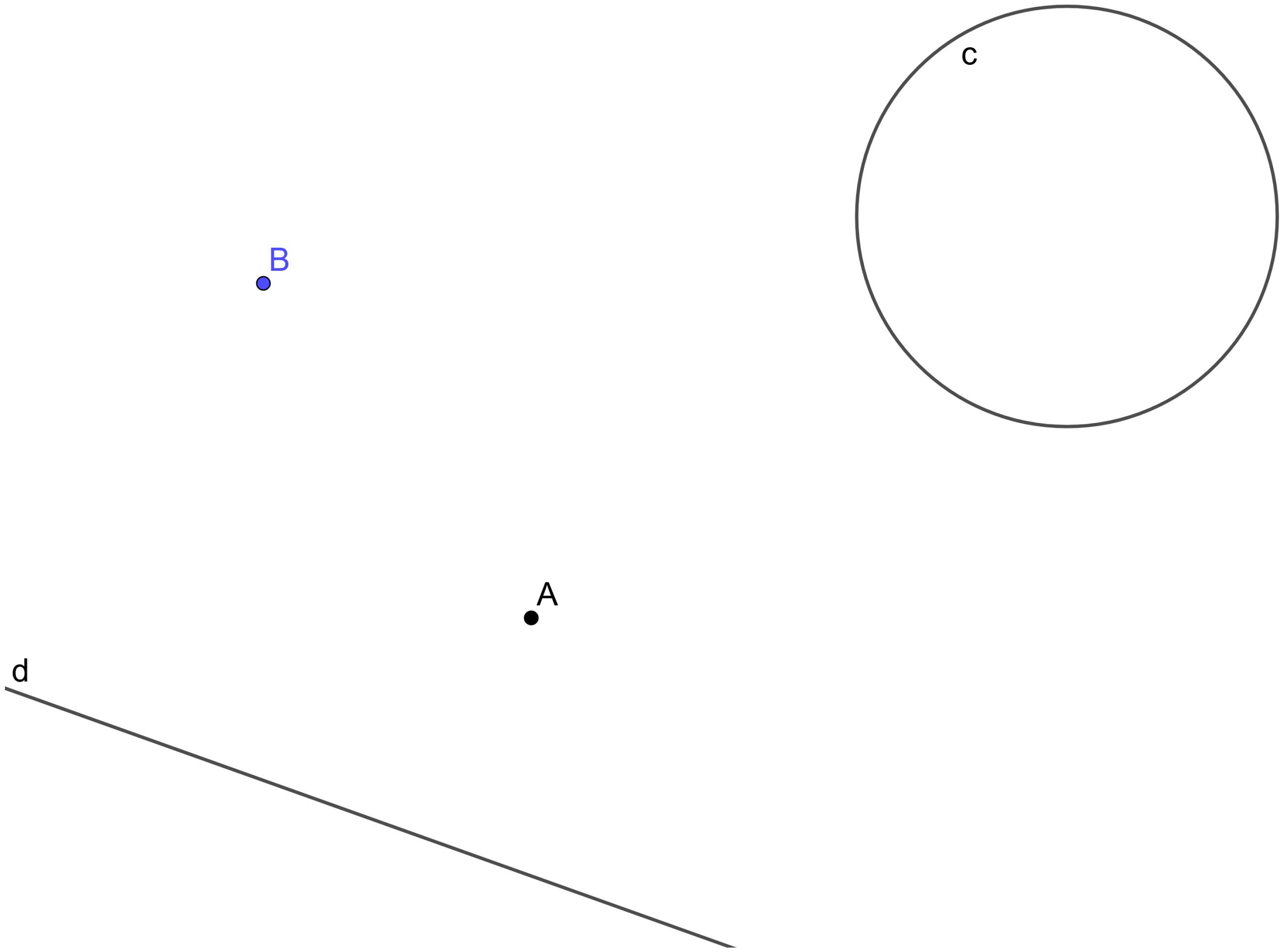
13. Recherche une équation de la médiatrice de $[AB]$ lorsque

   (a) $A(2;4)$ et $B(7;-1)$
   (b) $A(4;\frac{3}{2})$ et $B(\frac{5}{2};2)$

4

4.5 Distance entre un point et une droite

Détermine la distance entre le point A et chacun des 3 autres objets.



Lorsque le mathématicien parle de distance,

il s'agit de la plus courte distance.

Distance entre deux points

Définition

La distance entre deux points A et B est la longueur du segment $[AB]$ qui les relie. Cette distance se note $|AB|$ ou $dist(A, B)$. C'est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Propriété

Dans un repère orthonormé du plan, la distance entre les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par la formule suivante : $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
.

Exemple

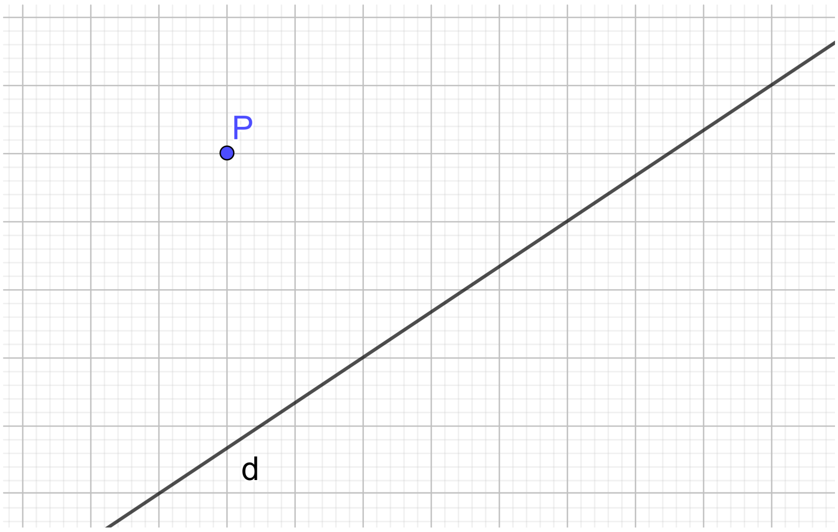
Dans un repère orthonormé, la distance entre les points $A(-2; 3)$ et $B(-\frac{1}{2}; 1)$ est :
$|AB| =$

4

Distance entre un point et une droite

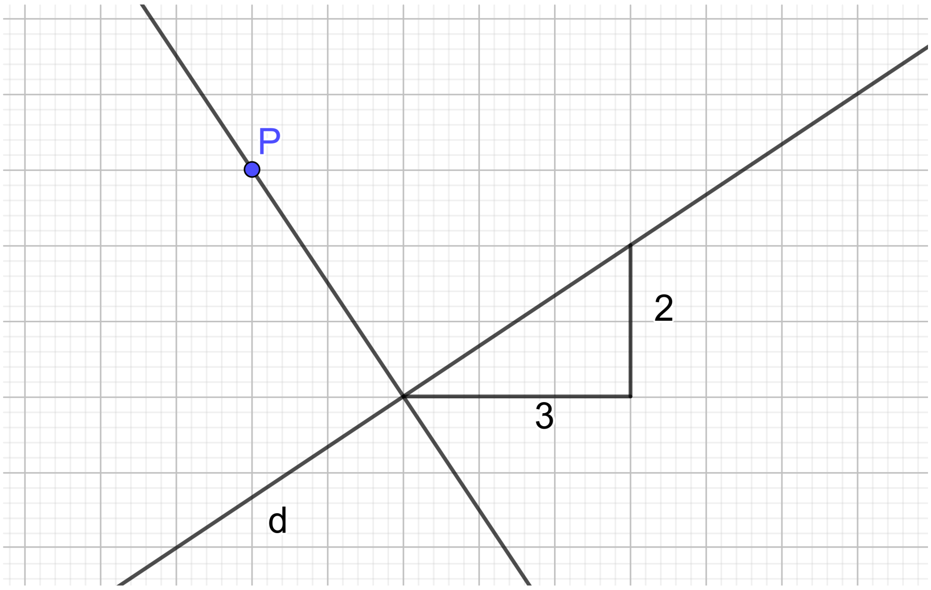
Nous allons calculer la distance entre le point P et la droite d.

Le côté d'un carré est 1 unité.

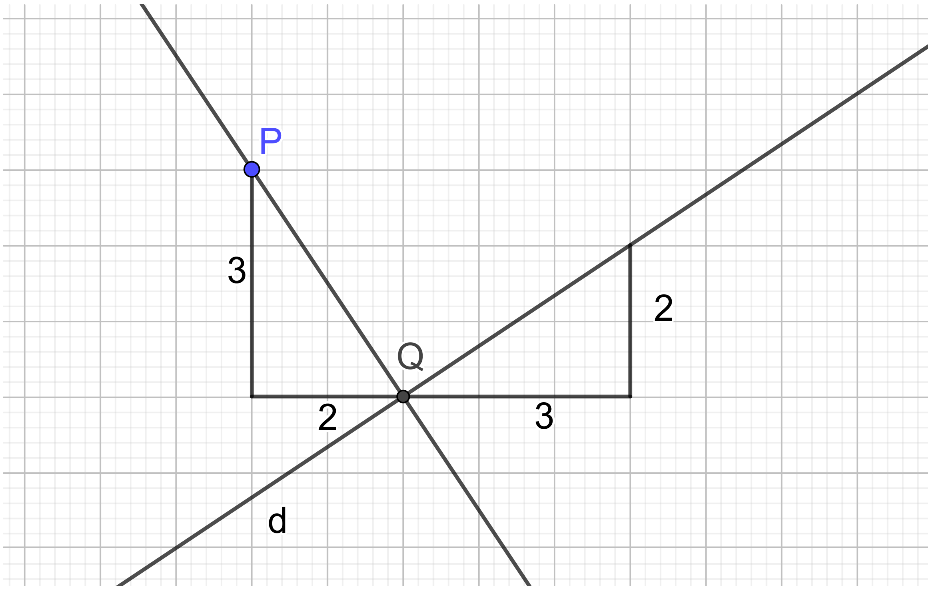


Manifestement, le pente de la droite est $\frac{2}{3}$.

C'est très intéressant car nous avons besoin de la perpendiculaire.



J'appelle Q le pied de la perpendiculaire.



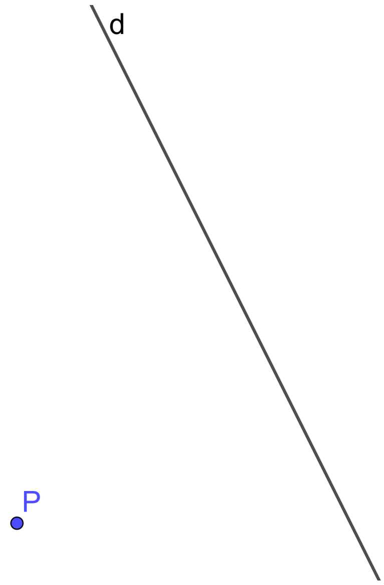
Et Pythagore me dit que la distance c'est $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$.

Bon, d'accord, j'ai un peu forcé pour que ça marche.
Mais quand même : la pente de la droite,
la perpendiculaire, prendre son pied
et chercher la distance entre les deux points,
c'est trop de la balle !

Construction

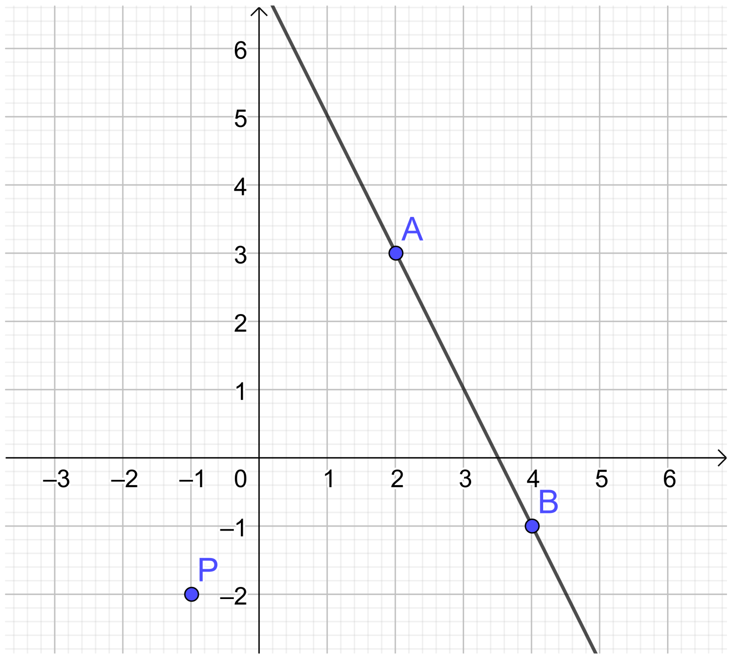
La distance entre le point P et la droite d est la distance entre P et Q où Q est le pied de la droite perpendiculaire à d passant par P.

$dist\,(P,d) = |PQ|$



Par calcul

Dans un repère orthonormé, calculons la distance entre le point $P(-1;-2)$ et la droite d passant par les points $A(2;3)$ et $B(4;-1)$.



$\overrightarrow{AB}\,(2;-4)$ La pente de AB est donc -2 et celle de la perpendiculaire $\dfrac{1}{2}$.

Cherche une équation de PQ.

puis les coordonnées de Q

et enfin la distance :

Exercices

1. Détermine la distance séparant les points A et B.
   (a) $A(3;-1)$ et $B(5;3)$
   (b) $A(\frac{1}{2};-2)$ et $B(3;3)$
2. Calcule la distance séparant le point $P(2;3)$ de $d \equiv y = \frac{x}{3} + 2$. Représente la situation.
3. Calcule la distance séparant le point $P(2;-2)$ de la droite d contenant les points $A\,(9;-1)$ et $B\,(1;5)$. Représente la situation.
4. Détermine la distance séparant le points $A\,(-2;3)$ et la droite contenant $B\,(1;-1)$ et $C\,(-1;3)$.

4.6 Parabole et cercle

Pour plus de facilité, nous travaillerons dans un repère orthonormé dans toute cette section.

Définition

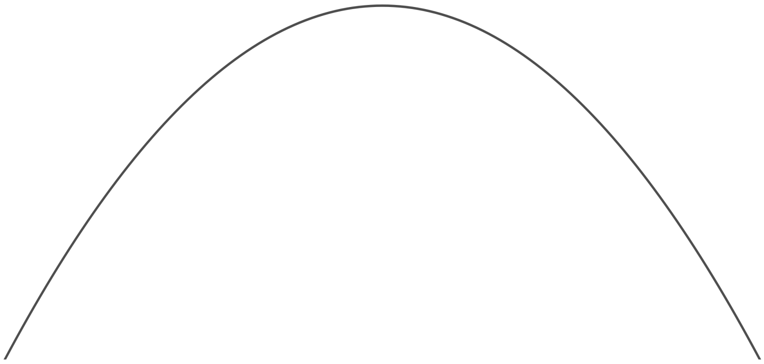
Un lieu est un ensemble défini de points.

La parabole

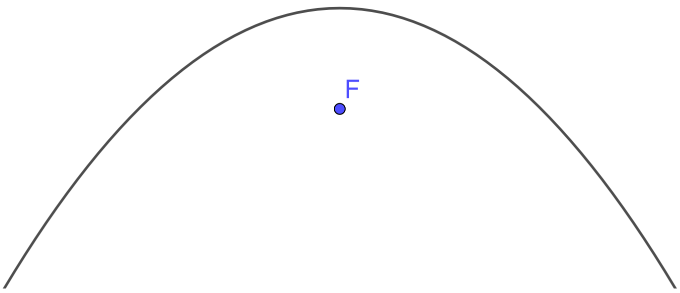
Allons sur la lune jouer à la balle avec le chien.

La lune est un excellent endroit pour jouer à la balle avec le chien.
Il n'y a pas d'atmosphère
et très peu de gravité.
En plus, c'est tranquille en ce moment.

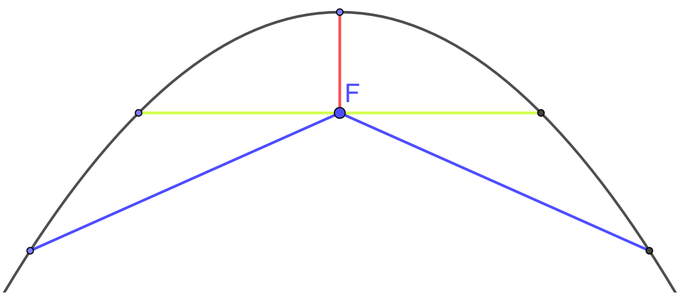
La balle décrit la trajectoire suivante.



Lorsqu'une comète s'approche du soleil puis s'en écarte à tout jamais, elle décrit une trajectoire semblable.

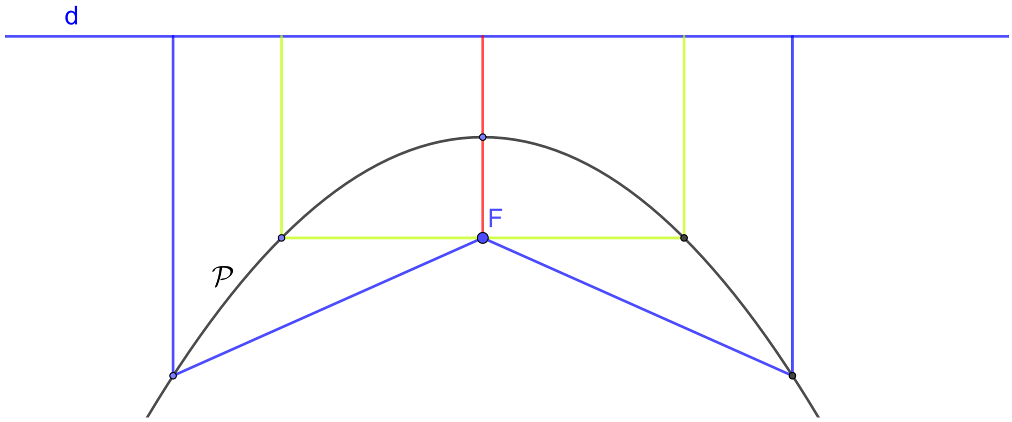


Ces courbes s'appellent des paraboles ; F en est le foyer (soleil).



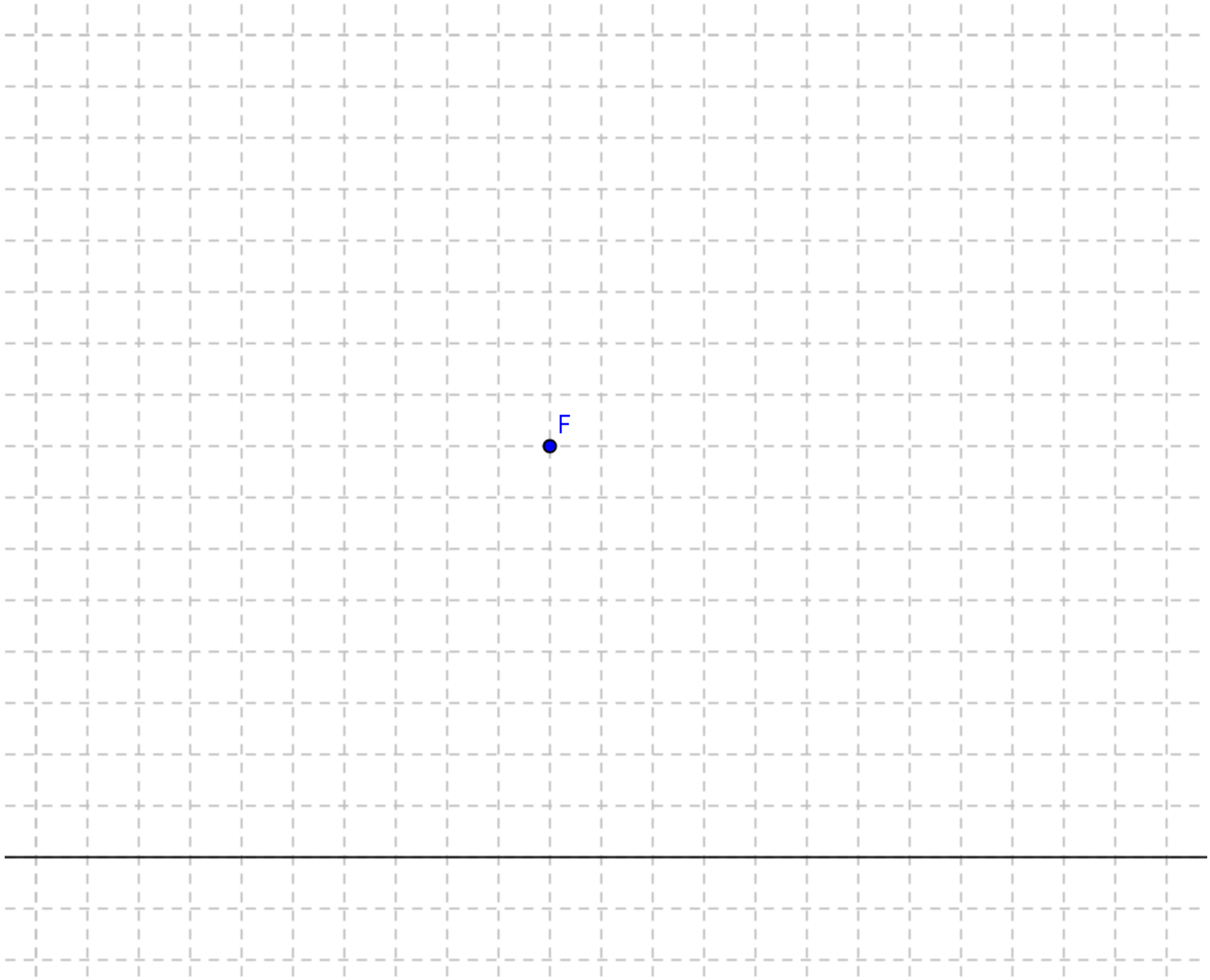
Lorsque l'objet parcourt la parabole, sa distance au foyer varie.

Il existe une droite où se trouvent les mêmes distances.



Cette droite s'appelle la directrice.

Dessine des points de la parabole $\mathcal{P}$ de directrice d et de foyer F ci-dessous :



Pour cela, trace une droite à 4 cm de d et un cercle de rayon 4 cm autour de F.

A l'intersection de la droite et du cercle se trouvent 2 points de la parabole.

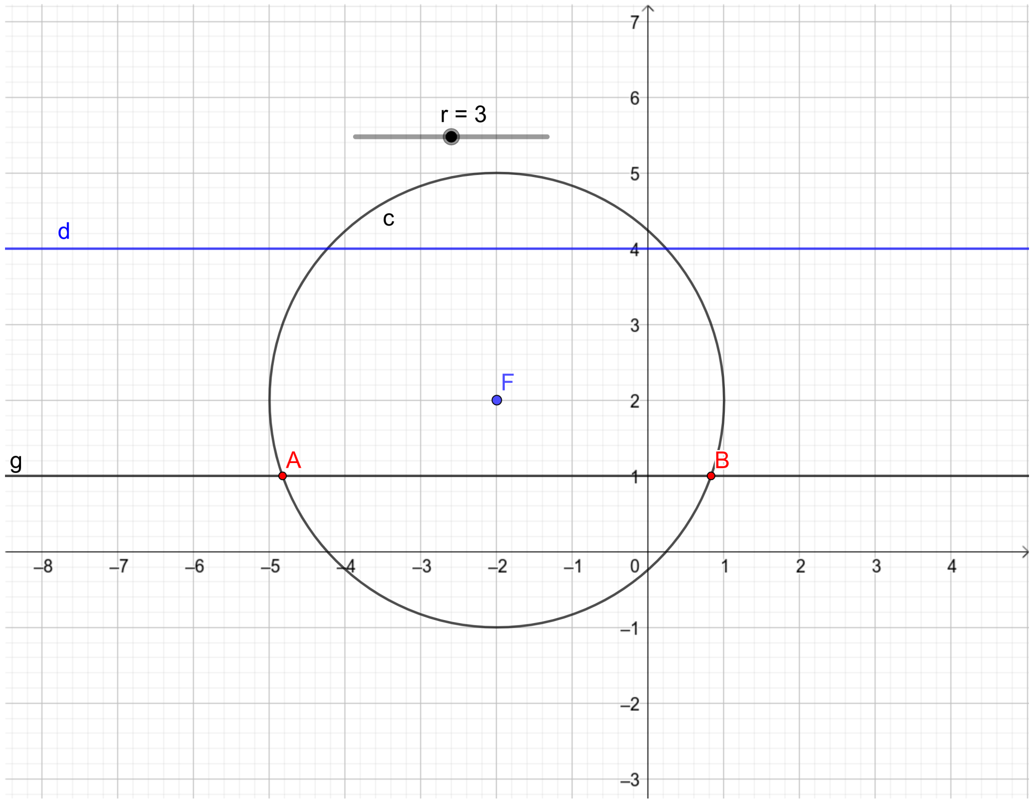
Recommence avec 3 cm, ...

Si tu n'y arrives pas, consulte

https ://www.geogebra.org/classic/de5guvz2

Tu y trouveras une vingtaine de points de la parabole de l'exemple, en déplaçant le curseur r.

Par exemple, les points A et B obtenus avec 3 cm.



La droite g se trouve à 3 cm de la directrice et le cercle c a un rayon de 3 cm du foyer.

$$dist\,(A;F) = dist\,(A;d)$$

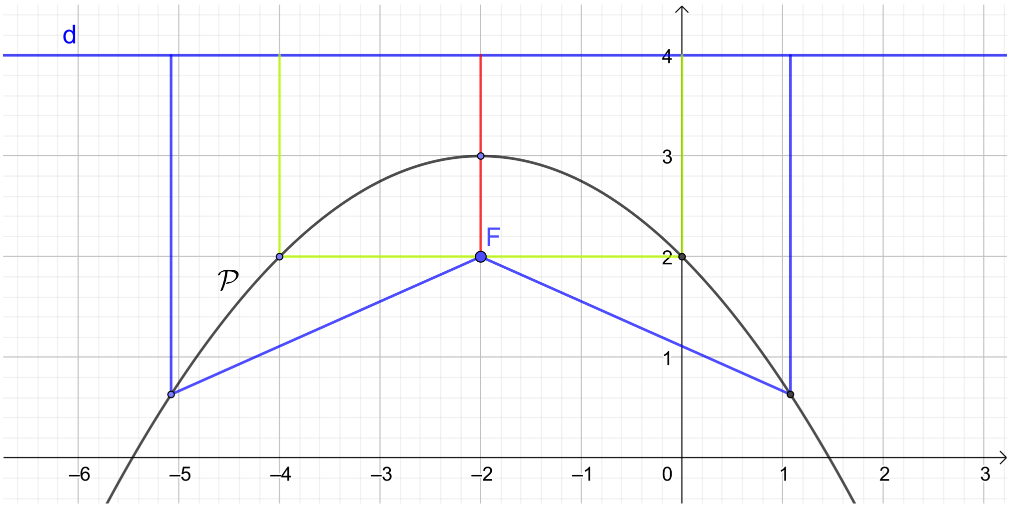
Propriétés de la parabole

1. La parabole admet un axe de symétrie s : la droite passant par F et perpendiculaire à d.

2. On appelle sommet S de la parabole le point « à mi-chemin » entre F et d. C'est le point de la parabole situé le plus près du foyer et de la directrice et l'unique point d'intersection de la parabole avec son axe de symétrie.

Équation de la parabole

Retournons sur la lune.



Les coordonnées du foyer sont $F(-2;2)$ et l'équation de la directrice $d \equiv y = 4$.

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \iff dist\,(P;F) = dist\,(P;d)$

C'est vrai pour les 5 points représentés.

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \iff \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 4 - y$

La distance entre le point et la directrice horizontale se mesure sur l'axe vertical.

Il faudrait prendre la valeur absolue, mais le temps de le dire, nous aurons élevé au carré.

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \iff (x+2)^2 + (y-2)^2 = (4-y)^2$

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \iff x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 16 - 8y + y^2$

Le premier qui oublie les doubles produits est expédié sur la lune, sans le chien !

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \iff x^2 + 4x - 4y - 8 = -8y$

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \iff 4y = -x^2 - 4x + 8$

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \iff y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$

Exercices

1. Détermine une équation cartésienne des paraboles suivantes et construis-les. On donne la directrice et le foyer.

   (a) $d \equiv y = -1$ et $F(0;1)$

(b) $d \equiv y = 2$ et $F(0;0)$

(c) $d \equiv y = 0$ et $F(2;2)$

(d) $d \equiv y = 4$ et $F(1;2)$

(e) $d \equiv y = 3$ et $F(3;-3)$

2. On donne la directrice et le foyer de trois paraboles. Pour chacune,

   détermine une équation cartésienne,

   détermine son sommet,

   détermine 3 paires de points symétriques,

   trace son graphique.

   (a) $F(0;4)$ et $d \equiv y = 2$

   (b) $F(-1;1)$ et $d \equiv y = 3$

   (c) $F(3;2)$ et $d \equiv y = 5$

Les trois exercices suivants concernent l'intersection entre une droite et une parabole.

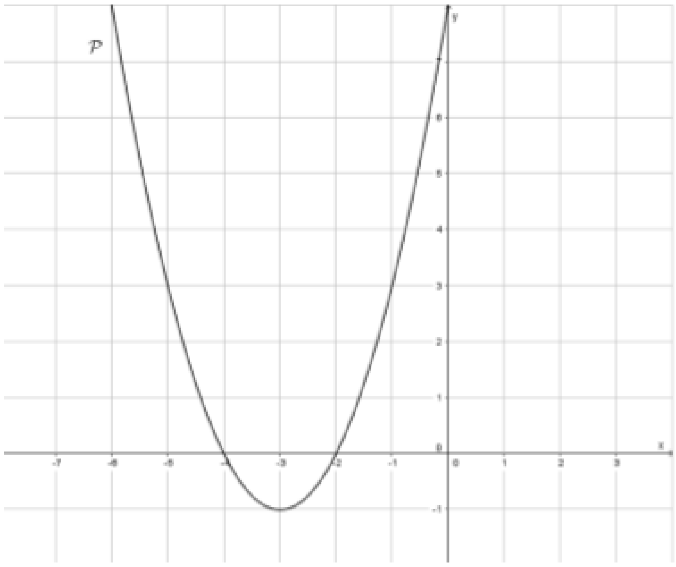
3. Soient la droite $d \equiv y = 2x - 4$ et la parabole d'équation $\mathcal{P} \equiv y = x^2 - 5x + 6$. Recherche, par calcul, les coordonnées des éventuels points d'intersection entre la droite et la parabole. N'oublie pas de vérifier graphiquement tes résultats.

4. Considérons la parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 + 2mx + 8$.

   (a) Détermine la valeur de m pour que $\mathcal{P}$ contienne le point $P(-1;3)$.

   (b) Recherche une équation de la droite d contenant $A(-7;2)$ et $B(1;6)$. Trace ensuite cette droite dans le repère ci-dessous.

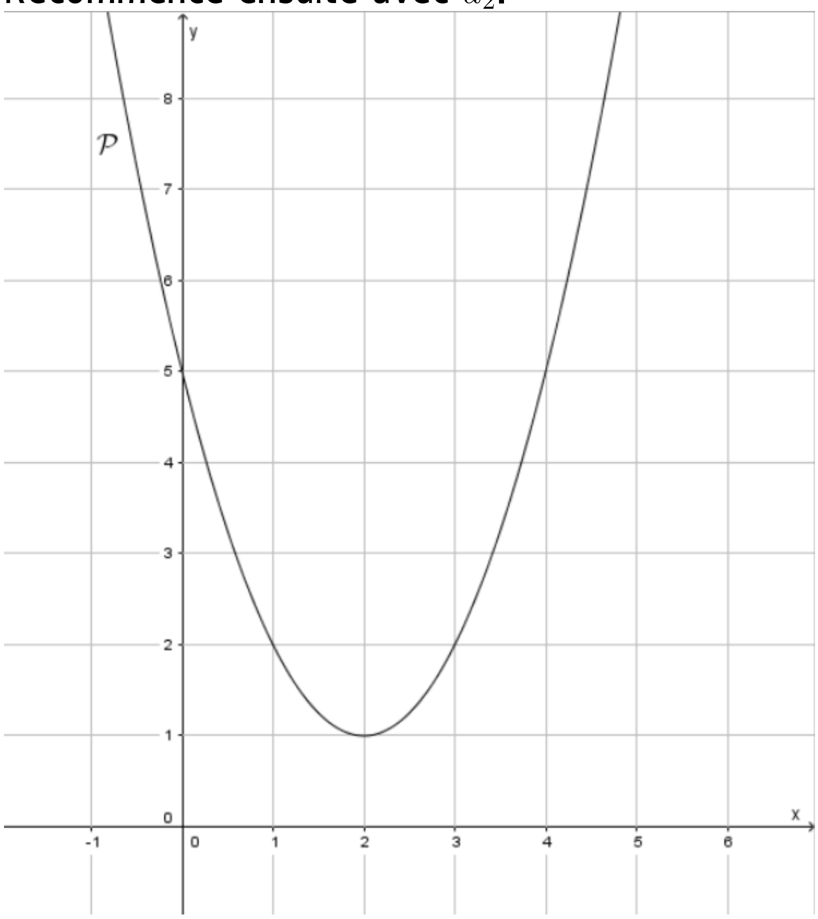
   (c) Détermine graphiquement puis algébriquement les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et d.



5. Soient la parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 - 4x + 5$ et les droites $d_1 \equiv y = -x + 5$ et $d_2 \equiv y = 2x - 4$.

   (a) Trace la droite d_1 dans le repère ci-dessous puis détermine graphiquement et algébriquement les cordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathcal{P}$ et d_1.

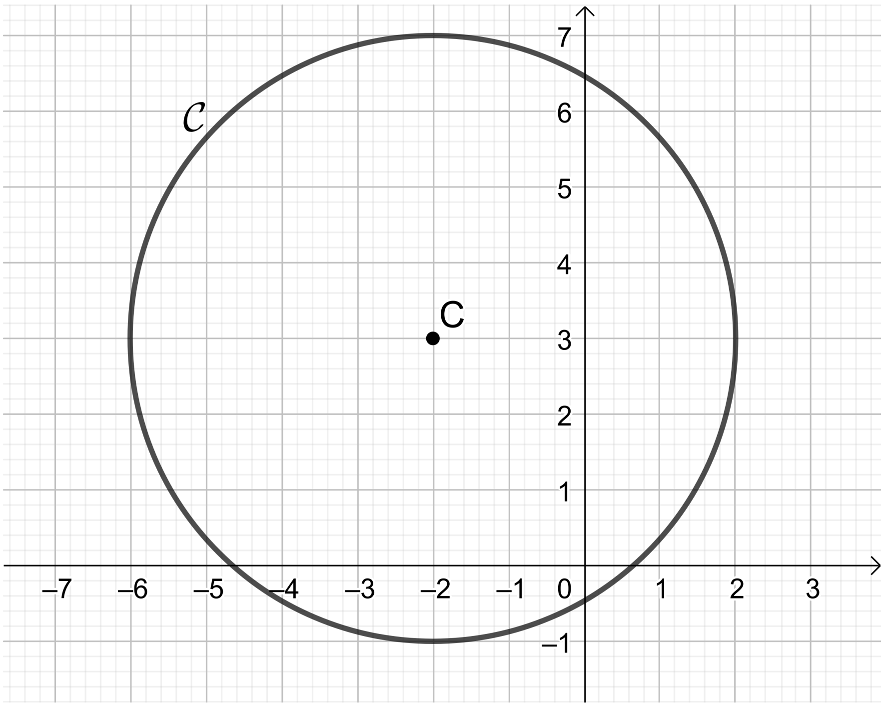
   (b) Recommence ensuite avec d_2.



Le cercle

Un cercle est déterminé par un centre et un rayon.

Exemple



Voici le cercle de centre $C\,(-2;3)$ et de rayon 4.
Un point P du plan appartient au cercle ssi $dist\,(C;P) = 4$.
Avec nos notations habituelles,

$P\,(x;y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow dist\,(C;P) = 4$

$P\,(x;y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = 4$

$P\,(x;y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ est l'équation canonique du cercle $\mathcal{C}$.
On y voit facilement les coordonnées du centre, dans les parenthèses $(x-\ )$ et $(y-\ )$ et le rayon, racine carrée positive du membre de droite.
Si nous développons cette équation,

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16 \Longleftrightarrow$

Nous obtenons

$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$

Comment remonter de cette forme développée et revenir à la forme canonique pour trouver le centre et le rayon ?

Pour éviter des faire des exemples et encore des exemples, ce sera fait en théorie dans la deuxième partie.

Exercices

6. Les équations suivantes représentent un cercle. Donnes-en le centre et le rayon.

   (a) $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

   (b) $x^2+y^2=7$

   (c) $x^2+y^2-8x+6y=21$

   (d) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$

   (e) $2x^2+2y^2-8y=0$

   (f) $x^2+y^2+2x-24=0$

   (g) $x^2+8x+y^2-2y=64$

   (h) $3x^2+3y^2-6y=7$

   (i) $5x^2+5y^2+5x-3y=0$

7. Détermine une équation des cercles suivants :

   (a) de centre $C(-3;4)$ et de rayon $R=3$ unités de longueur

   (b) de centre $C(0;0)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$ unités de longueur

   (c) de centre $C(5;0)$ et de diamètre 10 unités de longueur

   (d) de diamètre $[AB]$ avec $A(-3;2)$ et $B(2;-2)$

8. Dans un repère orthonormé, détermine, pour chacun des cercles suivants, une équation de la tangente au point $A(3;4)$.

   Vérifie d'abord que A appartient bien au cercle en question.

   (a) $\mathcal{C} \equiv x^2+y^2=25$

   (b) $\mathcal{C} \equiv x^2+y^2+2x-8y+1=0$

   (c) $\mathcal{C} \equiv x^2+y^2-8x+2y-9=0$

   (d) $\mathcal{C} \equiv x^2+y^2-6y-1=0$

9. Détermine une équation du cercle passant par $A(6;2)$, $B(-1;1)$ et $C(3;3)$.

10. Détermine une équation du cercle passant par $A(5;6)$, $B(-2;13)$ et $C(6;1)$.

4

Les trois exercices suivants concernent l'intersection entre une droite et un cercle.

11. Détermine pour chacun des cercles suivants, par dessin puis par calcul, les éventuels points d'intersection avec les axes du repère.

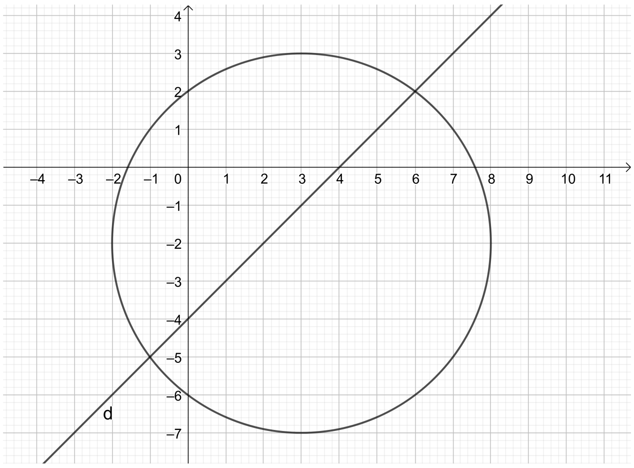
    (a) $\mathcal{C} \equiv (x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$

    (b) $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 4x - 18 = 0$

    (c) $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

    (d) $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 + x - 8y + 4 = 0$

12. Détermine graphiquement puis algébriquement les coordonnées des éventuels points d'intersection entre le cercle $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ et la droite $d \equiv y = x - 4$.



13. Détermine algébriquement les coordonnées des éventuels points d'intersection entre le cercle $\mathcal{C} \equiv x^2+y^2+2x-4y-21 = 0$ et la droite $d \equiv y = x+1$.

Chapitre 5

Deuxième degré

Table des matières

5

Objectifs

CONNAÎTRE

• Lier les diverses écritures de la fonction du deuxième degré avec certaines caractéristiques de la fonction ou de son graphique :

$x \to ax^2 + bx + c$

$x \to a(x+p)^2 + v$

$x \to a(x-x_1)(x-x_2)$

• Interpréter graphiquement les solutions d'une équation ou d'une inéquation du deuxième degré.

APPLIQUER

• Résoudre graphiquement et algébriquement une équation ou une inéquation du deuxième degré.

• Associer l'expression analytique d'une fonction du deuxième degré à son graphique et réciproquement.

• Construire l'expression analytique d'une fonction du deuxième degré à partir de son graphique et réciproquement.

• Déterminer les caractéristiques d'une fonction du deuxième degré.

•Déterminer l'expression analytique d'une fonction du deuxième degré répondant à des conditions données.

• Calculer la distance d'un point à une droite.

TRANSFÉRER

• Modéliser et résoudre un problème d'optimisation.

• Modéliser et résoudre des problèmes issus de situations diverses.

En plus des outils de « Tétramath, la méthode », tu auras besoin d'une calculette.

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/degre2

5.0 Prérequis

1. Effectue et réduis les termes semblables.

   (a) $(2x+1).(3x-2) =$

   (b) $(2x-a).(2a-3x) =$

   (c) $\left(x-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{3}{2}-2x^2\right) =$

   (d) $3.\left(\frac{x}{3}-2\right)-2.\left(\frac{x}{2}+4\right) =$

   (e) $3.(x-2)+5.(x+1).(2x-3) =$

   (f) $[2x-(x+1)]-2.(x-2).(x+3) =$

2. Reconnais le (ou les) produits remarquables à utiliser, effectue ensuite la formule et réduis les éventuels termes semblables :

   (a) $(2a+3b)^2 =$

   (b) $(3x-4)^2 =$

   (c) $(x-2).(x+2) =$

   (d) $(3k+2).(3k-2).(9k^2+4) =$

   (e) $(6a^2x^3-3ax)^2 =$

   (f) $(-2a+1)^2 =$

   (g) $\left(\frac{a^2}{3}+\frac{2b}{5}\right).\left(\frac{a^2}{3}-\frac{2b}{5}\right) =$

   (h) $(-2a^2-7x^2)^2 =$

   (i) $(-5c+2a).(2a+5c) =$

   (j) $(2x-3y).(3x+2y)+2.(x-y)^2 =$

   (k) $(5y-6x).(5y+6x)-(-3y+2x)^2 =$

3. Factorise le plus finement possible les expressions suivantes :

   (a) $3xy+3xz =$

   (b) $36xy^2+9x^2y-27xy =$

   (c) $4a^2-25b^2 =$

   (d) $(x-1).(x+2)+(x-1).(x+3) =$

   (e) $x^3-16x =$

   (f) $(2x+3)^2-49 =$

   (g) $x^2+9 =$

(h) $(7x+6).(3x-5)-(3x-5)=$

(i) $4x^2-28x+49=$

(j) $(x-1)^2-(2x-3)^2=$

(k) $12ab-15b^2+24ay-30by=$

(l) $2x^3+5x^2-2x-5=$

(m) $5x^4-20x^2=$

(n) $x^4-16=$

(o) $x^3-2x^2-9x+18=$

(p) $4.(x-1)-3.(x-1)^2=$

(q) $3a.(x-4)-2b.(4-x)=$

(r) $x^2.(a-b)+4.(b-a)=$

(s) $4x^3-12x^2+9x=$

(t) $(2x-7).(x+4)-(4x+1).(4+x)=$

(u) $3x^2+5x+2=$

(v) $2x^3+7x^2+2x-3=$

(w) $2x^3-8x^5-1+4x^2=$

(x) $2x^4-10x^3+16x^2-8x=$

(y) $x^3-19x+30=$

(z) $2x^4-x^3-19x^2+9x+9=$

5.1 Fonctions du deuxième degré

Dans le chapitre 2, nous avons vu que

1. Le passage de $f(x) = x^2$ à $g(x) = a(x+p)^2$ se caractérise par

une translation horizontale de -m unités
suivie d'une déformation verticale de coefficient $|a|$;
si a est négatif, la déformation est composée
avec une symétrie d'axe horizontal.

$(x; y) \to (x - p; ay)$

2. La courbe obtenue s'appelle une parabole.

3. L'axe de symétrie, axe des ordonnées (y) pour la fonction x^2,

devient la droite verticale d'équation $x = -p$.

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/fonctions (Avec x²)

Et bien, c'est presque tout ce qu'il faut savoir.
Prenons une quelconque fonction du deuxième degré :
$2x^2 + 4x - 1$.
Je vais essayer de l'écrire $g(x) = a(x+p)^2$.

Écris la justification à côté de chaque ligne.

$2x^2 + 4x - 1 = 2.\left(x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right)$

$2.\left(x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) = 2.\left(x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{2}\right)$

$2.\left(x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{2}\right) = 2.\left(x^2 + 2x + 1\right) - 3$

$2.\left(x^2 + 2x + 1\right) - 3 = 2.(x+1)^2 - 3$

J'ai bien obtenu $g(x) = a(x+m)^2$ sauf qu'il y a -3 à la fin du calcul.

1. Le passage de $f(x) = x^2$ à $g(x) = 2(x+1)^2 - 3$ se caractérise par

une translation horizontale de -1 unité

suivie d'une déformation verticale de coefficient 2

puis d'une translation verticale de -3 unités.

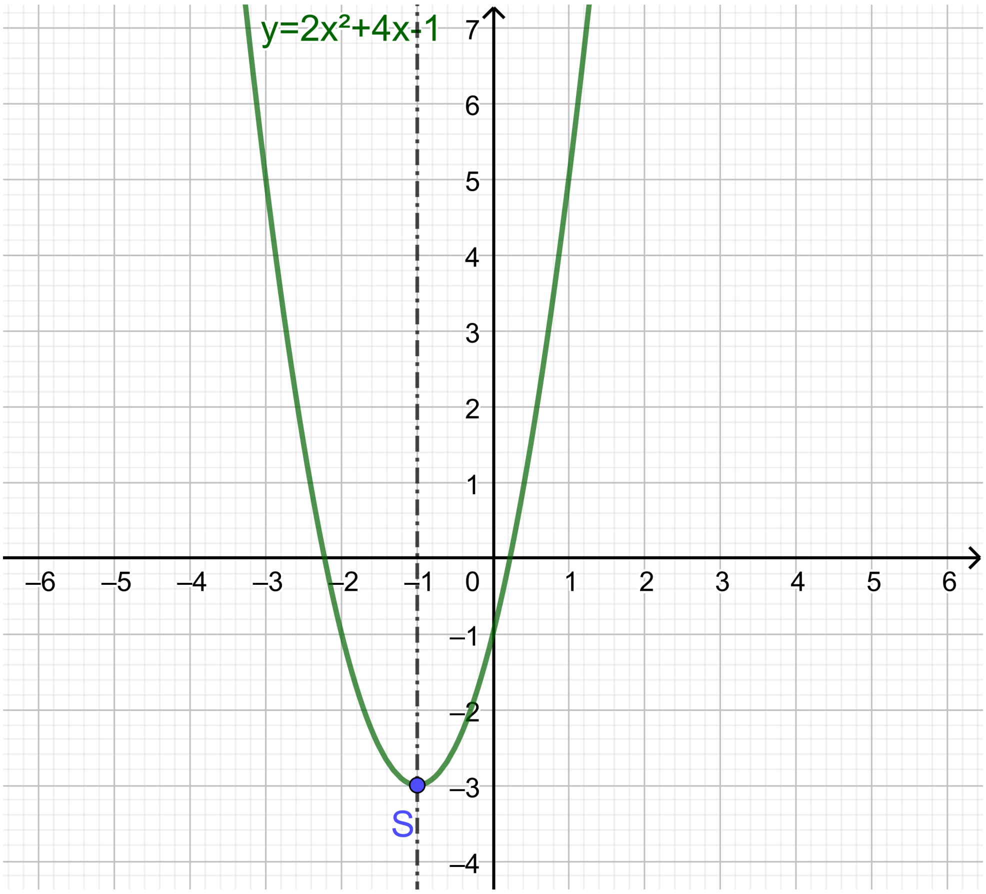
2. La courbe obtenue est une parabole.

3. L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = -1$.

Pour tracer cette fonction, cherche son sommet et quelques points symétriques, comme dans le chapitre 4 :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/geometrie (Parabole)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	15	5	-1	-3	-1	5	15



Comme $a > 0$, je n'ai pas du faire de symétrie d'axe Ox.
La parabole est souriante. Autrement dit :

x		-1	
$2x^2 + 4x - 1$	$\searrow$	m	$\nearrow$

Si $a < 0$, le tableau de variation serait :

x		$-\frac{b}{2a}$	
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

A toi !

Représente les fonctions du deuxième degré suivantes,

avec axe de symétrie, sommet et tableau de variation.

Oups ! J'oublie un « petit » théorème :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + v.$$

Ce qui donne $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.

Il faudra voir ça dans « à retenir »...

Exercice

Représente les fonctions du deuxième degré suivantes,

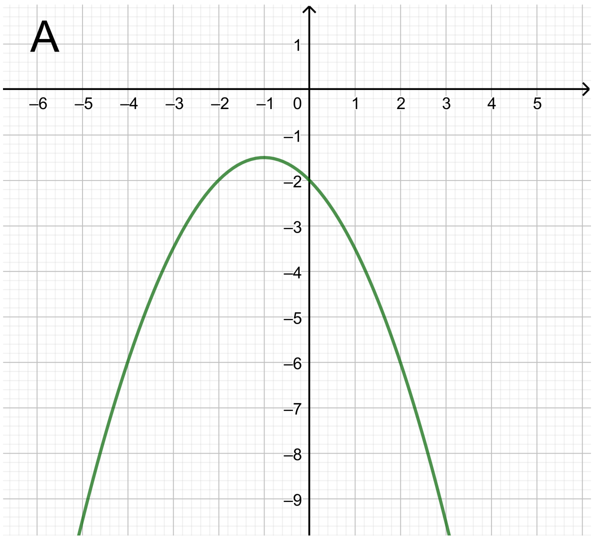
avec axe de symétrie, sommet et tableau de variation.

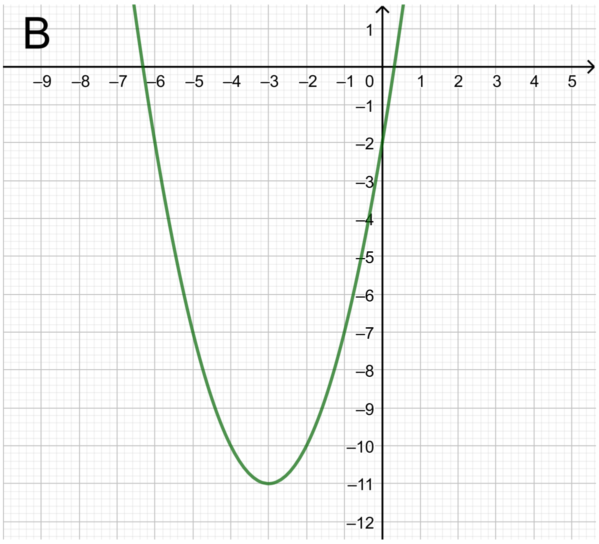
1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $f(x) = x^2 - 25$
3. $f(x) = 3x^2 - 9x$
4. $f(x) = 4x^2 + 20x + 25$
5. $f(x) = -x^2 + 5x - 4$
6. $f(x) = \frac{x^2}{3} + 2x + 4$

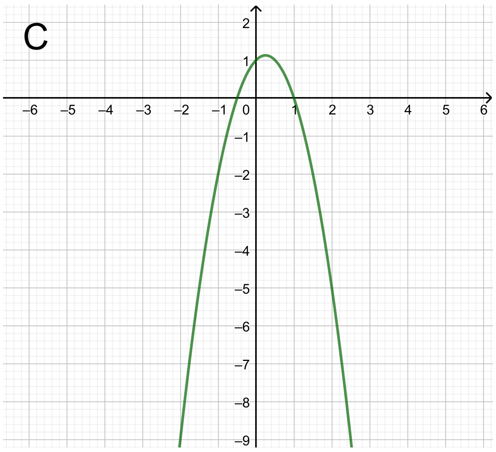
5.2 Fonctions du deuxième degré, le retour

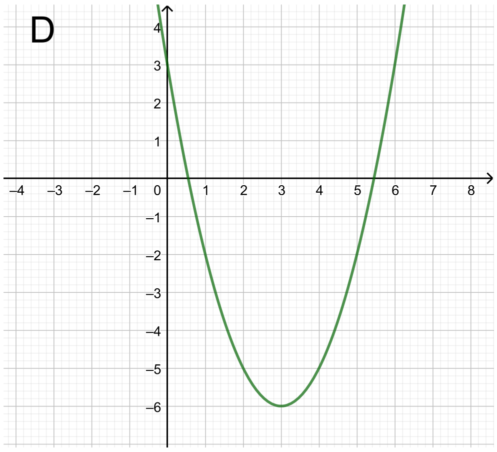
Voici 8 graphiques de fonctions du second degré.

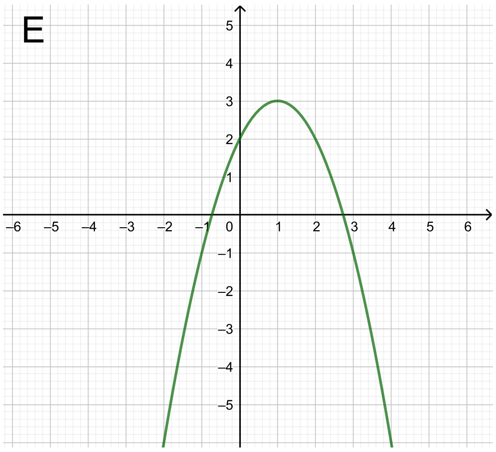
Lequel correspond à $f(x) = -x^2 + 2x + 2$?

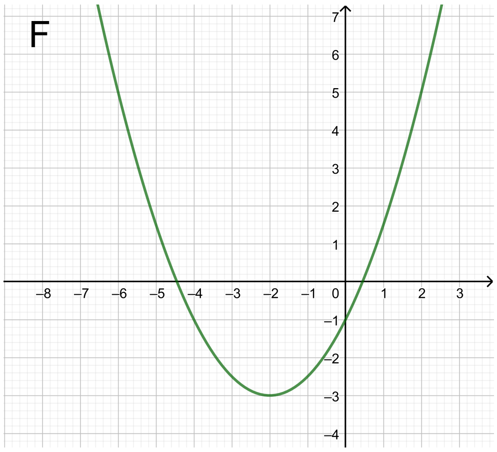


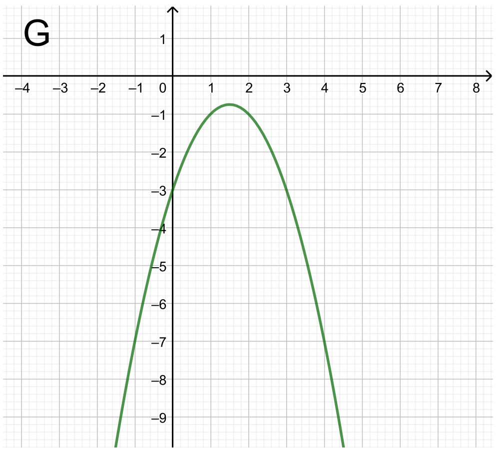


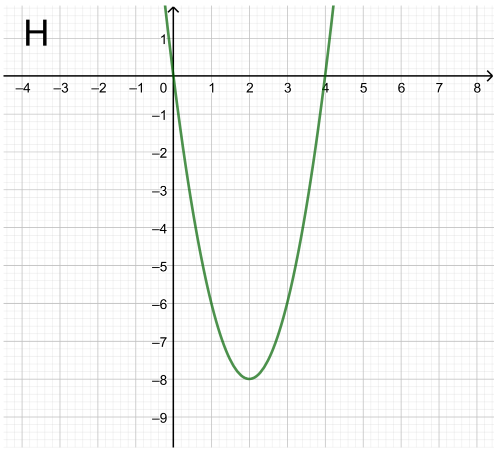












Pour $f(x) = -x^2 + 2x + 2$,

$a < 0$

$-\dfrac{b}{2a} =$ (visualise l'axe de symétrie)

et la fonction contient le point $(0;\ )$.

Il s'agit donc du graphique

Exercices

1. Avec les mêmes dessins, associe à chaque fonction du second degré le graphique qui lui convient

   (a) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

   (b) $f(x) = 2x^2 - 8x$

   (c) $f(x) = x^2 - 6x + 3$

   (d) $f(x) = -x^2 + 3x - 3$

   (e) $f(x) = x^2 + 6x - 2$

   (f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2$

   (g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

   (h) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

2. $f(x) = x^2 + bx + c$

   (a) Détermine b et c pour que $x = 2$ soit axe de symétrie et que la fonction contienne le point $(0;3)$.

   Trace ensuite la fonction.

   (b) Détermine b et c pour que $(1;2)$ soit le sommet.

   Trace ensuite la fonction.

3. $f(x) = ax^2 - x + c$

   (a) Détermine a et c pour que $x = 2$ soit axe de symétrie et que la fonction contienne le point $(0;3)$.

   Trace ensuite la fonction.

   (b) Détermine a et c pour que $(1;2)$ soit le sommet.

5

Trace ensuite la fonction.

(c) Détermine a et c pour que $(-1;1)$ soit le sommet.

Trace ensuite la fonction.

4. $f(x) = ax^2 + bx + 3$

(d) Détermine a et b pour que $(1;4)$ soit le sommet.

Trace ensuite la fonction.

(e) Détermine a et b pour que $(-1;1)$ soit le sommet.

Trace ensuite la fonction.

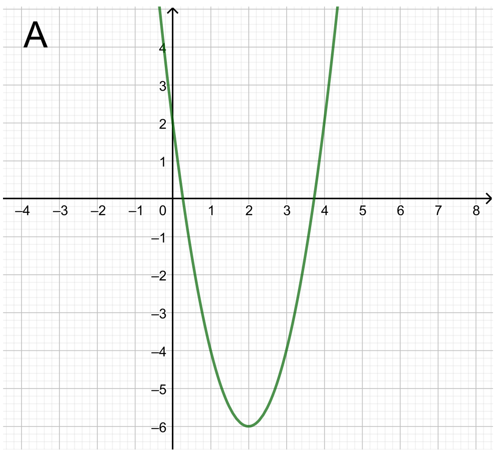
5. Un papa a filmé avec une caméra numérique son fils en train de lancer un ballon de basket. En regardant cet enregistrement avec arrêts sur image, il recueille les données du tableau ci-dessous.

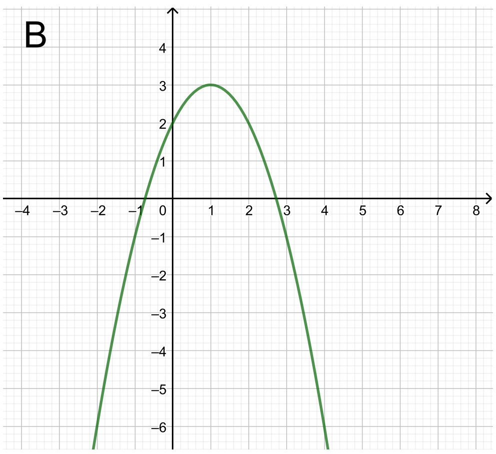
Reporte ces données dans un repère puis détermine une fonction qui modélise le phénomène observé.

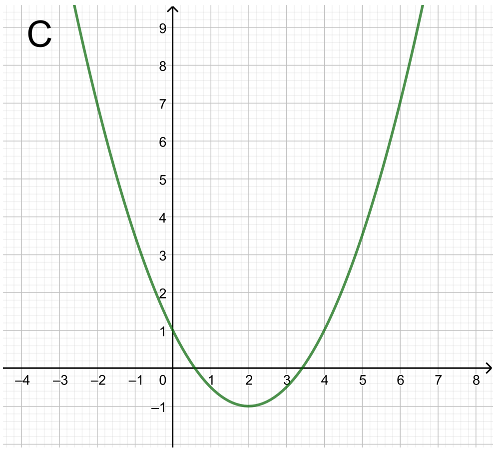
Compare ensuite les hauteurs calculées à l'aide du modèle aux hauteurs mesurées.

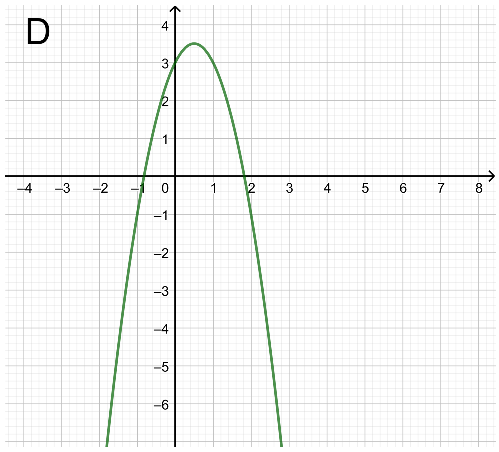
Temps en seconde	0	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
Hauteur du ballon en cm	84	121	149	167	175	174	163	143	114	75

6. Voici 4 fonctions du deuxième degré. Détermine f(x).





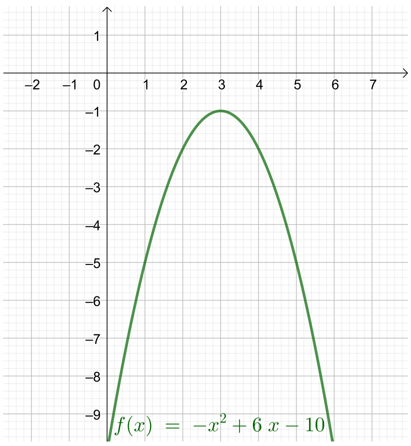


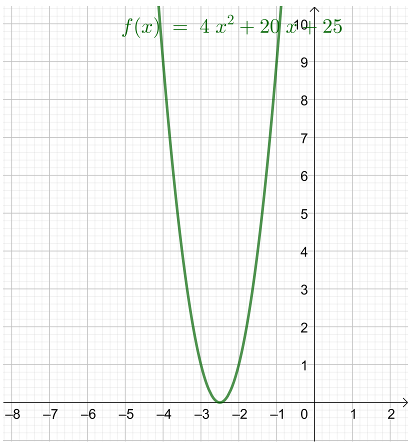


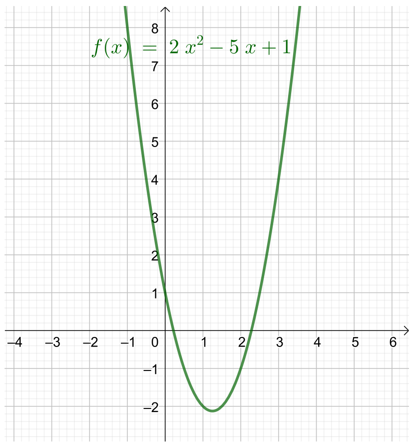
5.3 Équations et inéquations du deuxième degré

Incursion

Une équation du deuxième degré a la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
Avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, cela revient à $f(x) = 0$ ou encore $y = 0$ sur son graphique.







Observe les 3 graphiques ci-dessus.
Dans le premier, $y \neq 0$. Il n'y a pas de solution.
Dans le deuxième, $y = 0$ une fois. Il y a une solution.
Dans le troisième, $y = 0$ deux fois. Il y a deux solutions.

C'est la même chose pour
tous les graphes d'une fonction du second degré.
L'observer, c'est bien, mais peux-tu le démontrer ?

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Rappel

$f(x) = ax^2 + bx + c$
peut se réécrire sous la forme
$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + v$
et même (« A retenir » section 5.1) :
$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$
$f(x) = 0$ devient donc $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = -\dfrac{4ac - b^2}{4a}$
ou encore $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Si $b^2 - 4ac < 0$	Si $b^2 - 4ac = 0$	Si $b^2 - 4ac > 0$
	$x = -\dfrac{b}{2a}$	$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Il n'y a pas de racine.	Il y a une racine.	Il y a deux racines.

Il suffit donc de calculer $b^2 - 4ac$ pour séparer les trois cas.

On dit que $b^2 - 4ac$ est le discriminant ou le réalisant.

Notation : $\rho = b^2 - 4ac$.

Les détails de la démonstration se trouvent en deuxième partie.

Exercice

1. Résous les équations suivantes

   (a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

   (b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

   (c) $x^2 + x - 1 = 0$

   (d) $9x^2 + 24x + 16 = 0$

   (e) $2x^2 + 3x + 4 = 0$

   (f) $4x^2 = 16x$

5

(g) $18x^2 + 3x - 1 = 0$

(h) $x^2 - 5 = 0$

(i) $-x^2 + 2x + 5 = 0$

(j) $x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8} = 0$

(k) $-x^2 - 0,3x + 0,4 = 0$

(l) $x^2 = x$

(m) $-x^2 - 25 = 0$

(n) $x + 6x^2 = 1$

(o) $36x + 12 = 6x^2 - 6$

(p) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

Résolution d'équations incomplètes

Dans l'exercice précédent, nous avons rencontré

$4x^2 = 16x$ (f)

$x^2 - 5 = 0$ (h)

$x^2 = x$ (l)

$-x^2 - 25 = 0$ (m)

Ce sont des équations incomplètes :

Avec 0 dans le membre de droite,

il n'y a que deux termes dans le membre de gauche.

$4x^2 - 16x = 0$ (f)

$x^2 - x = 0$ (l)

Toutes ces équations peuvent se résoudre en faisant très peu de calculs.

(f) $4x^2 - 16x = 0$	(h) $x^2 - 5 = 0$	(l) $x^2 - x = 0$	(m) $-x^2 - 25 = 0$
$4x.(x-4) = 0$	$x^2 = 5$	$x.(x-1) = 0$	$-x^2 = 25$
$4x = 0 \, ou \, (x-4) = 0$	$x = \pm\sqrt{5}$	$x = 0 \, ou \, (x-1) = 0$	$x^2 = -25$
$x = 0 \, ou \, x = 4$		$x = 0 \, ou \, x = 1$	Pas de solution

5

Exercice

2. Résous les équations suivantes

   (a) $5x^2 + 1 = 0$

   (b) $x^2 = 81$

   (c) $7x^2 = 3x$

   (d) $4x^2 - 3 = 0$

   (e) $12x^2 - 27 = 0$

   (f) $7x^2 + 9x = 0$

   (g) $121 - 49x^2 = 0$

   (h) $(x + 3)^2 = 5$

   (i) $(x - 2)^2 = 9\,(x - 2)$

   (j) $x^2 - 10 = 0$

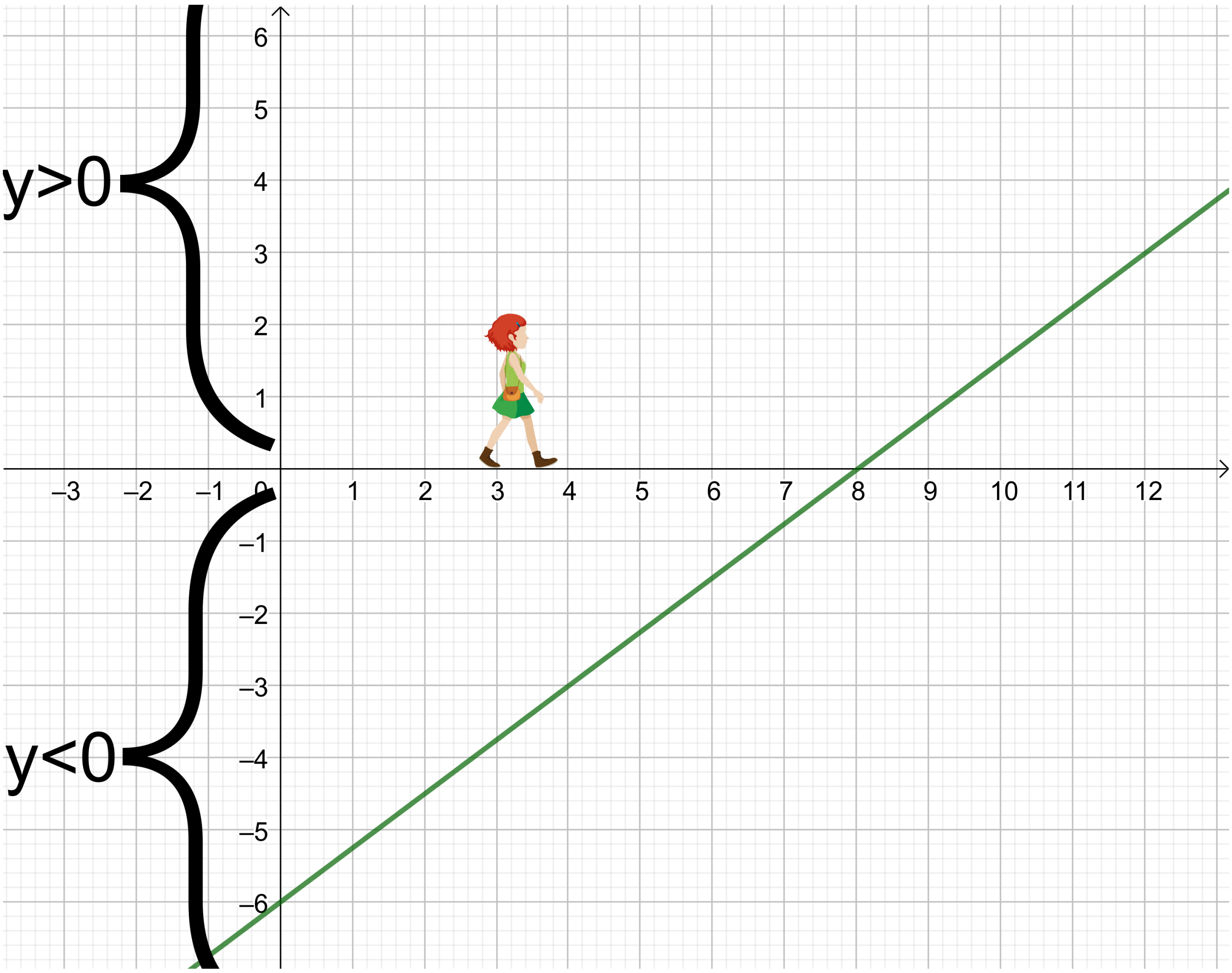
   (k) $(x - 9)^2 + 1 = 0$

   (l) $(4x - 7)^2 = 0$

Signe d'une fonction du second degré

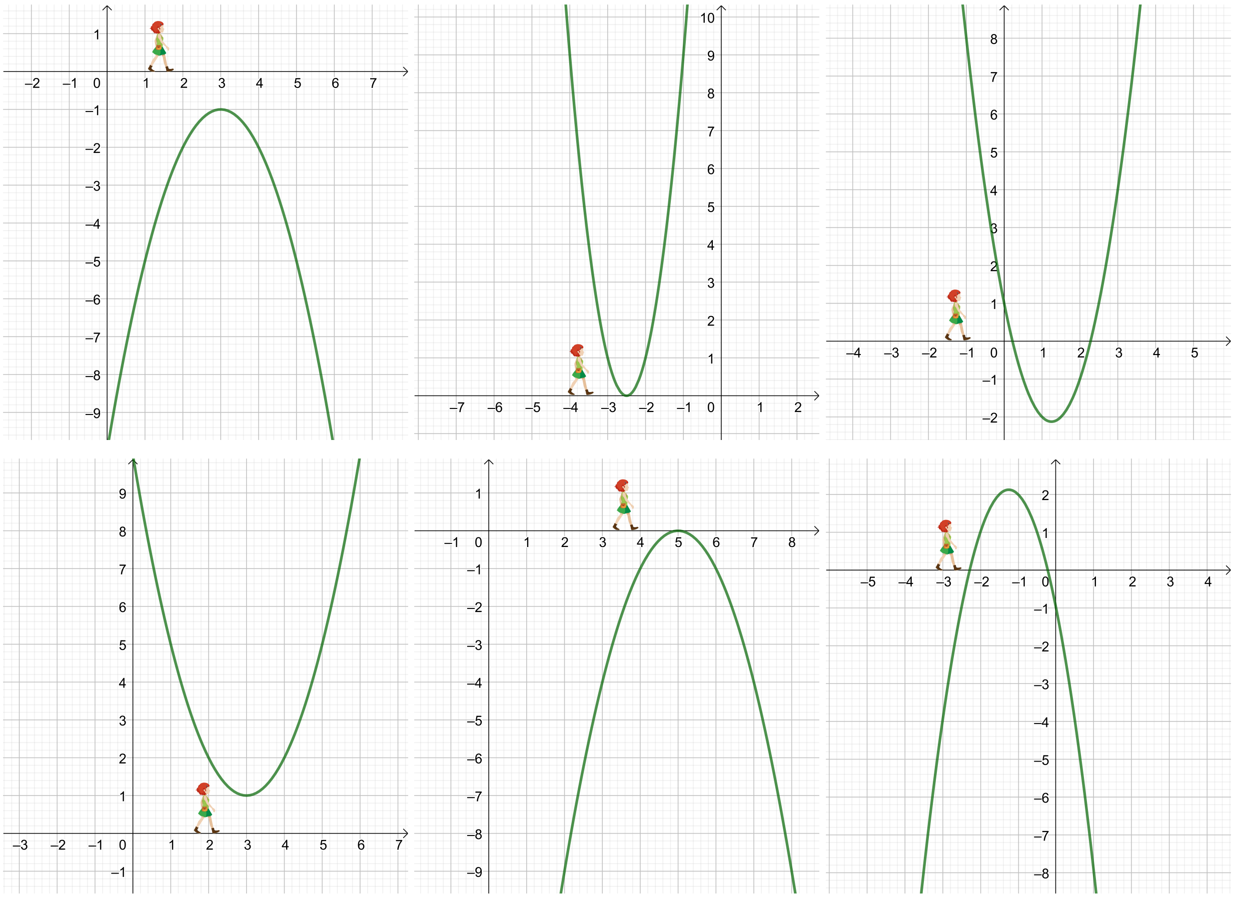
Rappel : signe d'une fonction

Le signe d'une fonction est le signe de ses images.
Les images se trouvent sur l'axe vertical, qui est orienté vers le haut.
Ainsi, lorsqu'une fonction est positive,
son graphique se trouve au-dessus de l'axe des x.
Lorsqu'une fonction est négative,
son graphique se trouve en dessous de l'axe des x.



Cette fonction est négative pour x<8 et positive pour x>8.

Pour une fonction du second degré, voici les 6 cas :



C'est un peu compliqué, 6 cas,
d'autant que je ne m'appelle pas 'J'ai 6 cas'.
Simplifions tout ça.

Pour une fonction du second degré :

signe de a partout, sauf entre les racines.

Et ça marche !

Exercice

3. Vérifie pour les 6 cas.

Nombre de racines	signe de a	signe de f(x)
2	+	+ 0 - 0 +

Exemples

• Étudions le signe de $x^2 + 5x + 6$.

$\rho = 25 - 4.6 = 1$ 2 racines : $\dfrac{-5 \pm 1}{2} =< \begin{array}{l} -3 \\ -2 \end{array}$

a>0

x		-3		-2	
$x^2 + 5x + 6$	+	0	-	0	+

• Étudions le signe de $2x^2 + 3x + 4$.

$\rho = 9 - 4.8 = -23$ pas de racine

a>0

x	
$2x^2 + 3x + 4$	+

• Étudions le signe de $-x^2 + 4x - 4$.

$\rho = 16 - 4.4 = 0$ 1 racine : $\dfrac{-4}{-2} = 2$

a<0

x		2	
$x^2 + 5x + 6$	-	0	-

Exercices

4. Dresse le tableau de signe de

   (a) $x^2 - 6x + 8$

(b) $x^2 + x - 1$

(c) $9x^2 + 24x + 16$

(d) $4x^2 - 16x$

(e) $18x^2 + 3x - 1$

(f) $x^2 - 5$

(g) $-x^2 + 2x + 5$

(h) $x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}$

(i) $x^2 - x$

(j) $-x^2 - 25$

(k) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$

(l) $-x^2 + 6x - 9$

(m) $x^2 + x + 8$

5. Étudie et représente la fonction f (y compris le signe et les intersections avec les axes).

(a) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

(b) $f(x) = -4x^2 + 9$

(c) $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$

(d) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

(e) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

(f) $f(x) = \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2}$

Inéquations du deuxième degré

La résolution d'inéquations fait apparaître des ensembles contenant une infinité de nombres.
Voici un petit rappel.

Exercice

6. Complète le tableau

	Intervalle	Inégalité(s)	Signification
1)	$]-1;5[$		
2)		$-8 \leq x < 11$	
3)			Ensemble des réels inférieurs à -5
4)	$]-1;8]$		
5)		$-1 \leq x \leq 3$	
6)			Ensemble des réels inférieurs à -1 ou supérieurs ou égaux à 6
7)	$]-2;+\infty[$		
8)		$x < 7$	

5

Exemples

Résolvons

• $x^2 + 2x < 3$

$x^2 + 2x - 3 < 0$

x						
x^2+2x-3			0		0	

Solutions :

• $x.(x-6) > 2.(x-8)$

$x^2 - 6x > 2x - 16$

$x^2 - 8x + 16 > 0$

x				
$x^2-8x+16$			0	

Solutions :

Exercice

7. Résous les inéquations suivantes.

   (a) $-x^2 \geq x - 12$

   (b) $25x^2 \leq 49$

   (c) $x^2 - \sqrt{3}.x + 1 < 0$

   (d) $4 - x^2 \leq x^2 - 2x$

   (e) $9 - x^2 > x^2 + 3x$

   (f) $x^2 + 1 \geq 9 - x^2$

   (g) $2x > 2x^2 - 2x$

   (h) $x^2 - x + 1 < 2x^2 - 3x + 2$

5

5.4 Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

Somme et produit des solutions de l'équation du second degré

Propriété (théorème de Viète)

Quand $\rho \geq 0$, les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on pour

- somme $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- produit $P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$

Utilisation pour vérifier les solutions

Résoudre l'équation $5x^2 + 6x + 1 = 0$.

Solutions :

Somme des solutions : Est-ce bien $-\dfrac{b}{a}$?

Produit des solutions : Est-ce bien $\dfrac{c}{a}$?

Factorisation de $ax^2 + bx + c$

Synthèse

	$\nearrow$	$\rho > 0$	$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$	où $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}$
Factorise	$\rightarrow$	$\rho = 0$	$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1)^2$	où $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$
	$\searrow$	$\rho < 0$	$ax^2 + bx + c$ est infactorisable.	

Exercices

1. Factorise, sans oublier la mise en évidence et les produits remarquables.

   (a) $x^2 - 3x + 2$

   (b) $6x^2 + 5x - 6$

   (c) $8x^3 + 6x^2 - 5x - 3$

   (d) $x^2 - 9$

   (e) $2x^2 - 4x$

   (f) $4x^2 - 20x + 25$

   (g) $10x^3 - 3x^2 - 16x - 3$

2. Simplifie les fractions suivantes ; précise les conditions d'existence avant et après simplification :

   (a) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

   (b) $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 4x}$

   (c) $\dfrac{2x^2 - x - 3}{10x^3 - 3x^2 - 16x - 3}$

   (d) $\dfrac{4x^2 - 20x + 25}{8x^2 - 26x + 15}$

5.5 Problèmes et optimisation

Optimisation

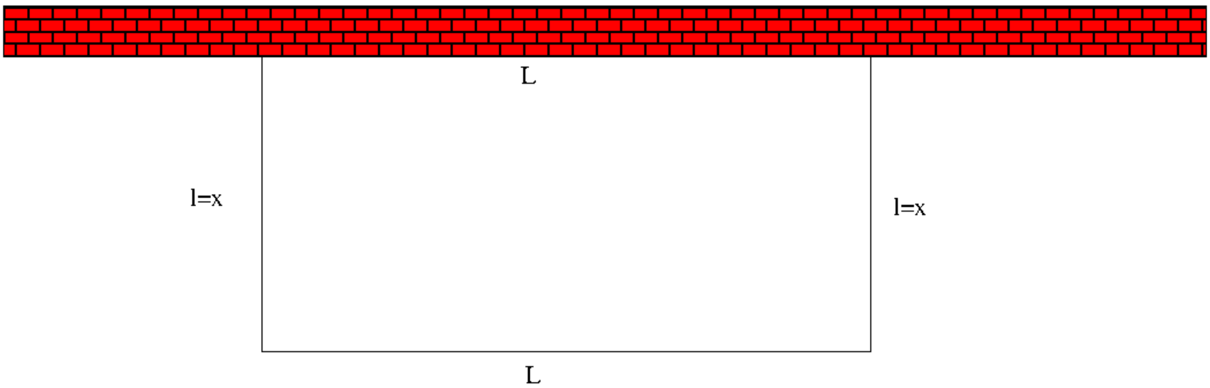
Un problème d'optimisation consiste à chercher un maximum ou un minimum.
Dans une fonction du deuxième degré, le maximum $(a < 0)$ ou le minimum $(a > 0)$ est donné par $-\dfrac{b}{2a}$.

Exemple

Le long d'un mur droit, on dispose un treillis de manière à former un enclos rectangulaire.

Sachant qu'il y a 200 mètres de treillis, quelles sont les dimensions de l'enclos de surface maximale ?

Commençons par faire un dessin, vu du haut.



Avant de déterminer $f(x)$, précisons x.

Inconnue : la profondeur de l'enclos, x

La largeur est donnée par $200 - 2x$.

La fonction à maximiser est la surface. Elle est donnée par

$f(x) = (200 - 2x).x = -2x^2 + 200x$

$-\dfrac{b}{2a} = 50$

x		50	
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

$x = 50$

Réponse :

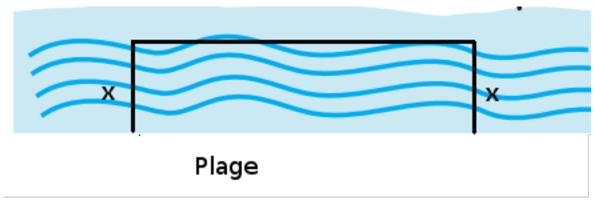
la profondeur est de 50 mètres et la largeur de $200 - 2.50 = 100$ mètres.

Exercices

1. Un maître nageur dispose d'une corde de 320 m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.

   A quelle distance x du rivage doit-il placer les bouées pour que le rectangle ait une aire maximale ?

   Calcule cette aire maximale.

2. Le risque de développer des problèmes de santé peut être évalué par la fonction suivante : $R(i) = 0,002.i^2 - 0,08.i + 0,85$ où i représente l'indice de masse corporelle.

   Cet indice s'exprime au moyen de la relation suivante : $i = \dfrac{Masse\,(en\,kg)}{(Taille\,(en\,m))^2}$.

   Maxime mesure 1,75 m et pèse 80 kg.

   (a) Quel est son indice de masse corporelle ?

   (b) Quel devrait être sa masse idéale ?

3. Une salle de spectacle vend ses billets d'entrée 24€.

   Habituellement, elle accueille 1000 spectateurs.

   Une étude nous apprend que, à chaque augmentation de 1€ du prix du billet, le nombre de spectateurs diminue de 50.

   De même, à chaque diminution de 1€ du prix du billet, le nombre de spectateurs augmente de 50.

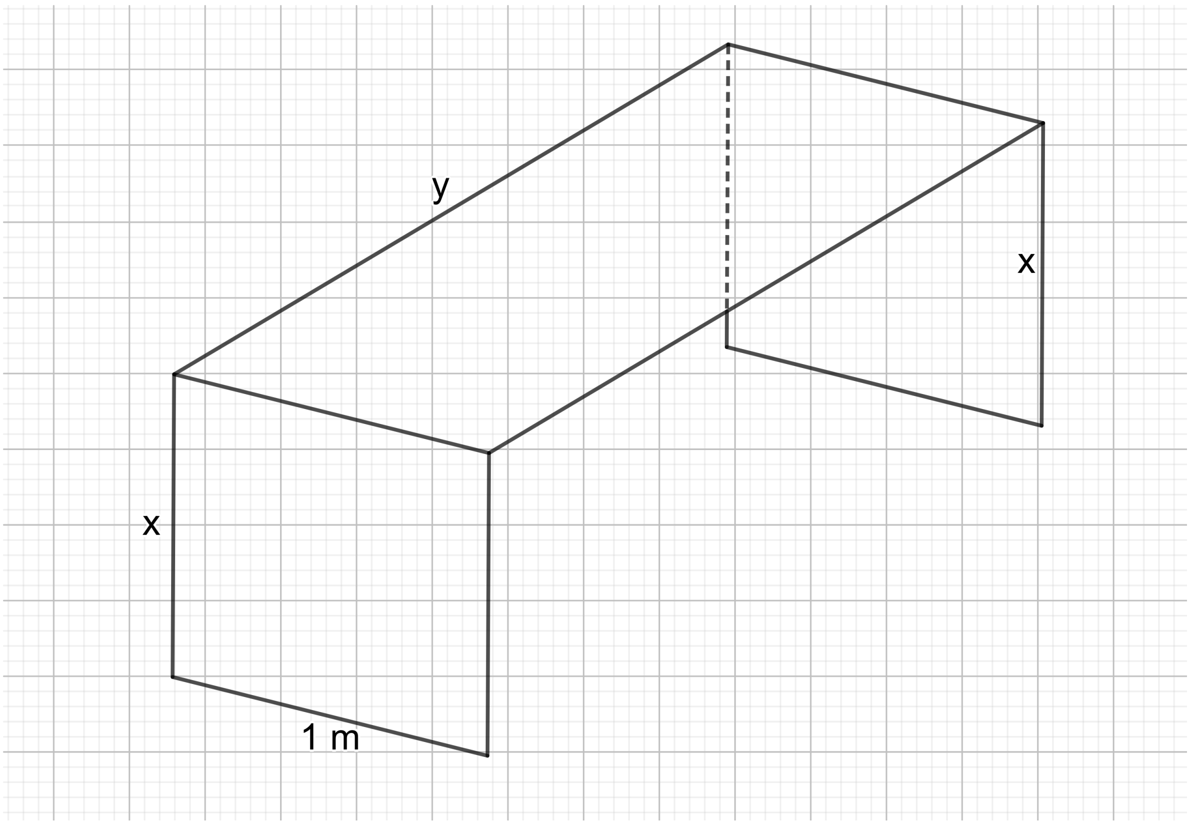
   Quel est le prix du billet qui donne la recette maximum ?

4. Un abri ouvert formé de parois rectangulaires est composé de deux parois verticales de 1 m de profondeur et d'un toit plat.

   Le toit est exécuté en zinc qui coûte 40€ le m² et les deux autres côtés en contre-plaqué qui coûte 15€ le m².

   Quelles dimensions rendront maximal le volume de l'abri sachant qu'on dispose de 300€ pour la construction ?

5



5. Un verger compte, en ce moment, 20 arbres. Le rendement moyen est de 300 oranges par arbre.

   On estime que, pour chaque arbre additionnel, le rendement moyen par arbre diminuera de 10 oranges.

   Combien d'arbres faut-il ajouter pour obtenir la plus grande production ?

6. Une ficelle d'un mètre de long est coupée en 2 morceaux.

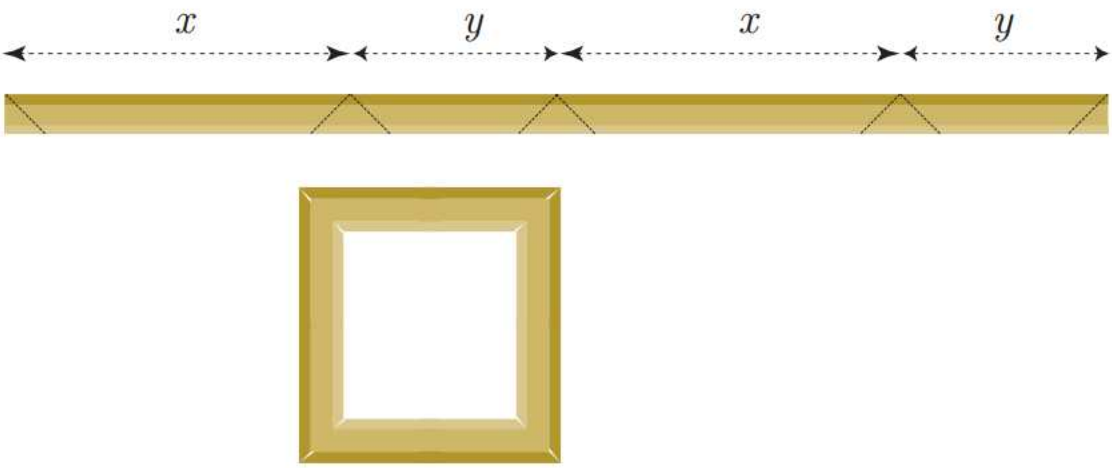
   Avec l'un des deux morceaux on forme un cercle et avec l'autre un carré.

   Où couper pour que la somme des aires des deux figures obtenues soit minimale ?

   (Aire d'un cercle :πr^2 ; Périmètre du cercle : $2\pi r$)

7. Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une baguette rectangulaire de 24 cm de long et de 1 cm de large.

   Comment devra-t-il couper cette baguette pour que la surface intérieure du cadre soit maximale ?



8. Détermine deux nombres dont la somme est 29 et dont le produit est maximal.

9. Détermine deux nombres entiers consécutifs tels que la somme du double du premier avec le carré du second soit minimale.

Problèmes divers

Résous les problèmes suivants en respectant bien les étapes
choix des inconnues
mise en équation
résolution
écriture des solutions
vérification.

Exemple

La distance de freinage d (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur route mouillée est donnée approximativement par l'équation $d = \frac{v}{4} + \frac{v^2}{100}$

a) Calcule la distance de freinage d'une voiture roulant à 120 km/h.

b) Si un conducteur décide de freiner 30 m avant un signal stop, à quelle vitesse doit-il rouler pour s'arrêter au bon endroit ?

c) Quelles vitesses permettent des distances de freinage inférieures à 50 m ?

a) $v = 120$ Il suffit de remplacer : $d = \dfrac{120}{4} + \dfrac{120^2}{100} = 174$ mètres.

b) $d = 30$, ce qui donne l'équation $30 = \dfrac{v}{4} + \dfrac{v^2}{100}$

$\dfrac{1}{100}v^2 + \dfrac{1}{4}v - 30 = 0$ $\rho =$ $v =$

Réponse : $v = 43,68$ km/h

c) $d = 50$, ce qui donne l'inéquation $\dfrac{v}{4} + \dfrac{v^2}{100} < 50$

$\dfrac{1}{100}v^2 + \dfrac{1}{4}v - 50 < 0$ $\rho =$ Racines :

v					
$\frac{1}{100}v^2 + \frac{1}{4}v - 50$		0		0	

Réponse : Vitesses inférieures à 59,31 km/h

Exercices

10. Avec son lance-pierre, David lance, de la fenêtre de sa chambre, un caillou en direction de Goliath qui passe dans la rue.

    La trajectoire du projectile (en mètres) peut être représentée par la parabole d'équation $y = -0,016x^2 + 0,8x + 8$

    où y désigne la hauteur du projectile et x la distance horizontale qui le sépare de David.

    (a) Trace la trajectoire du projectile.

    (b) Détermine à quelle distance de la maison de David le caillou va retomber (on suppose qu'il n'y a pas de vent !).

    (c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la pierre ?

    (d) Quelle est la hauteur de la fenêtre de la chambre de David ?

    (e) Quand le caillou atteint-il une hauteur de 10 m ? Réponds en utilisant le dessin puis par calcul.

    (f) Le caillou lancé par David touche-t-il Goliath si on sait que ce dernier se trouve à 57 m de la maison et qu'il mesure 1,80 m ?

11. Pour les douze mois de l'année écoulée, l'avoir y d'une société (en millions d'euros), est donnée par la formule $y = t^2 - 8t + 7$, t désignant le temps exprimé en mois (t = 0 le 1er janvier).

(a) Représente la courbe visualisant l'évolution de cet avoir au cours des 12 mois de l'année.

(b) Quand l'avoir de la société est-il positif ?

(c) Quand la société a-t-elle contracté des dettes ?

(d) A quelle date se trouve-t-elle la plus endettée ? De quelle somme ?

(e) De combien d'euros se chiffre la plus-value effectuée par la société sur l'année écoulée ?

12. Pour qu'un médicament ait un effet bénéfique, il faut que sa concentration dans le sang dépasse une certaine valeur, appelée niveau thérapeutique minimal.

    Admettons que la concentration (en mg/l) d'un certain médicament t heures après qu'on l'ait pris oralement est donnée par
    $c = \dfrac{20t}{t^2+4}$.
    Si le niveau thérapeutique minimal est 4 mg/l, déterminer quand le médicament est efficace.

13. Il y a 100 m de clôture disponibles pour entourer un terrain rectangulaire.

    Pour quelles largeurs la surface clôturée aura-t-elle au moins $600\ m^2$?

14. Le propriétaire d'un verger estime que, si 24 arbres sont plantés par hectare, chaque arbre adulte produira 600 pommes par an.

    Pour chaque arbre supplémentaire planté par hectare, le nombre de pommes produites par arbre diminuera de 12 par an.

    Combien faut-il planter d'arbres par hectares pour obtenir au moins 16416 pommes par an ?

15. Pour descendre une côte de 15 km, un motocycliste réalise une vitesse moyenne qui dépasse de 20 km/h celle qu'il réalise en montée.

    Si ce motocycliste veut faire une montée et une descente en moins de 50 minutes, quelles doivent être ses vitesses en montée et en descente ?

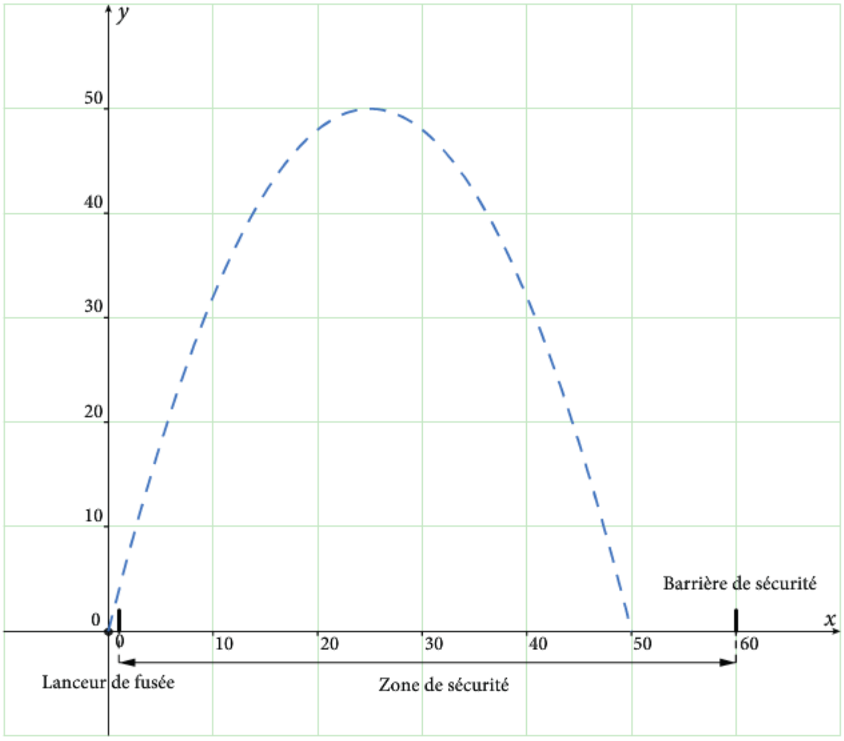
16. Lors d'un feu d'artifice, les artificiers sont cachés des spectateurs par un mur de 2 mètres de hauteur placé à 1 mètre du lanceur de fusées et les spectateurs sont placés à 60 mètres du lanceur, derrière une barrière de sécurité.

    La trajectoire d'une fusée qui n'exploserait pas est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'origine est le lanceur de fusée.

5

La hauteur de la fusée est donnée par $h(x) = -\frac{50}{v^2}x^2 + 4x$

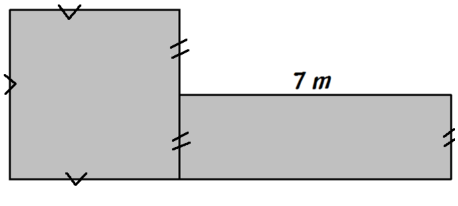
où x est la distance horizontale par rapport au lanceur et v la vitesse initiale (v > 0) en mètres par seconde.



(a) Pour des raisons de sécurité, l'artificier choisit de faire exploser la fusée lorsque son altitude est d'au moins 32 mètres. Détermine graphiquement pour quelles valeurs de x il peut faire exploser la fusée.

(b) Donne une expression de la distance x entre la fusée et le lanceur en fonction de la vitesse initiale v si la fusée retombe au sol sans exploser, c'est-à-dire lorsque $h(x) = 0$. En déduire les valeurs de v pour lesquelles la fusée retombe dans la zone de sécurité.

17. Un horticulteur désire créer un parterre ayant la forme ci-contre et une superficie de $19\,m^2$. Quelles dimensions doit-il prendre pour le carré et le rectangle ?



18. La somme d'un nombre et de son carré est 182. Quel est ce nombre ?

19. Trouver deux entiers consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit 545.

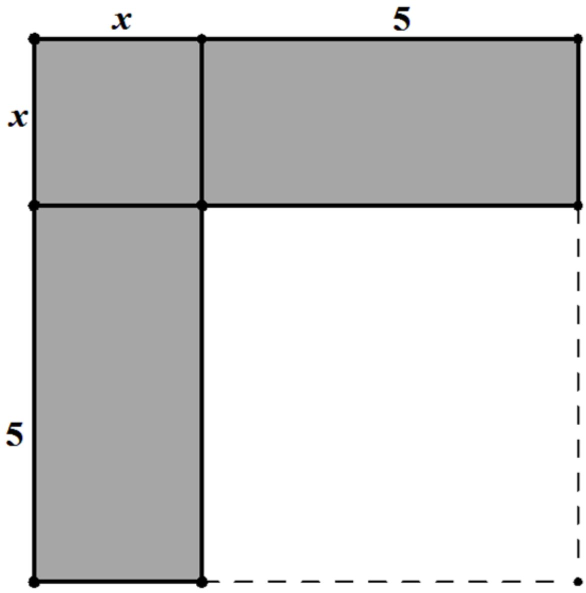
20. Un homme souhaite acheter un lopin de terre carré à la campagne.

    Pour cela, il dispose de 3120€.

    Le terrain qui l'intéresse coûte 11 €$/m^2$ et pour clôturer sa propriété, il va utiliser un treillis qui coûte 6 € par mètre.

    S'il décide de consacrer tout son budget à la réalisation de son projet, quelle doit être la mesure du côté du terrain ?

21. Si l'aire totale (en gris foncé) vaut 39 unités, calculez la longueur x .



    Remarque : Ce problème a été résolu en premier lieu par Muhammad al-Khwarizmi (dessin ci-contre) (auteur du livre intitulé Hisab al jabr wa lmugabala qui est considéré comme le premier livre d'algèbre).

    Ce problème a figuré pendant des siècles dans les manuels d'algèbre.

    Al-Khwarizmi a résolu ce problème géométriquement en complétant le carré.

22. J'ai acheté des livres (coûtant tous le même prix) pour 60 €.

    Si j'en avais eu trois de plus pour ce même prix total, chacun aurait coûté un euro de moins.

    Combien de livres ai-je achetés ?

23. Quelles longueurs ont les deux aiguilles d'une horloge si la distance de leurs extrémités est de 17 cm à midi et de 85 cm à 9 heures.

24. Trouver les longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle sachant que ces longueurs sont trois naturels consécutifs.

25. La longueur d'un rectangle surpasse sa largeur de 5 cm. Son aire mesure 324 cm^2 . Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

26. Abstraction faite des couleurs, le drapeau suédois présente une croix de largeur constante couvrant le tiers de la surface.

Si ce drapeau mesure 1 m de longueur et 66 cm de largeur, quelle est approximativement la largeur de la croix ?

27. Trouve deux entiers consécutifs tels que leur produit dépasse de 11 unités leur somme.

28. Une feuille de 24 cm sur 36 cm est employée pour faire une affiche, le plus petit côté étant en bas.

Les marges sur les côtés et en haut devront avoir la même largeur, et la marge du bas aura le double des autres marges.

Trouve la largeur des marges

si l'aire de la surface imprimée est 661,5 cm^2 .

29. L'aire d'un carré double lorsque l'on augmente son côté de un mètre.

Quelle est la mesure du côté du carré initial ?

30. Le rayon d'un disque mesure 8 cm. De combien faut-il l'augmenter pour que l'aire du disque double ?

31. Un fermier veut clôturer un terrain rectangulaire, utilisant l'écurie pour border un côté et une barrière pour les trois autres côtés.

Si le côté parallèle à l'écurie vaut deux fois la longueur d'un côté adjacent et si l'aire du terrain est de 128 m^2 , combien de mètres de barrière doit-il acheter ?

32. On veut faire une boite ouverte de base carrée à partir d'une tôle carrée, en coupant à chaque coin un carré de 3 cm de côté et en pliant les côtés.

Quel doit être le côté de la tôle pour que la boîte ait un volume de 48 cm^3 ?

5

33. Lors d'un concert, les spectateurs paient une entrée de 5 € et le groupe coûte 20 € par musicien.

    Détermine le nombre de spectateurs et de musiciens présents si le bénéfice est de 490 € et si on recense 128 personnes en tout dans la salle.

34. Trouve deux nombres dont la somme fait -3 et tels que lorsqu'on additionne le double du premier avec le carré du second, on obtienne 2 comme résultat.

5.6 Compléments

Résolution d'équations

Exercice

1. Résous les équations suivantes.

   (a) $5x^2 = 18x$

   (b) $x^2 - 4x = 3$

   (c) $(2x-1)^2 = 9$

   (d) $2x^2 = x^2 + 100$

   (e) $(x+1)^2 - 2 = x.(x+3) - (1-2x)$

   (f) $3(x-1)^2 - 2(x+2).(3x-1) = 12$

   (g) $(x+5).(3x-1) + 15 = (x+3)^2 - (2x+1)^2 + 12x$

   (h) $4(x+1)^2 = (x+1).(2x-3)$

   (i) $\dfrac{x^2-1}{3} - \dfrac{x^2-3x-2}{2} = x$

   (j) $\dfrac{x+4}{x-4} - \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{8}{x^2-16}$

   (k) $\dfrac{2x+10}{x+2} + \dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{4}{(x+3).(x+2)}$

   (l) $\dfrac{x-3}{x+2} = \dfrac{3x+1}{11x+1}$

5

(m) $\dfrac{2x-3}{x-1} = x-1$

(n) $\dfrac{3x+1}{x^2-4} - \dfrac{4x-1}{x^2-3x-10} = \dfrac{3}{x-2}$

(o) $\dfrac{2x}{3\,(x-2)} - \dfrac{x+5}{2\,(x+1)} = \dfrac{4}{x^2-x-2}$

(p) $\dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{3x^2+1}{1-x^2} = \dfrac{x+1}{1-x}$

Simplification de fractions rationnelles

Exercice

2. Simplifie les expressions suivantes ;
précise les conditions d'existence avant et après simplification.

(a) $\dfrac{6x^2+13x-28}{9x^2-16}$

(b) $\dfrac{-12x^2+7x+12}{4x^2+7x+3}$

(c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{2x^2-5x-3}$

(d) $\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

(e) $\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-4x}$

(f) $\dfrac{2x^2-x-3}{10x^3-3x^2-16x-3}$

(g) $\dfrac{4x^2-20x+25}{8x^2-26x+15}$

Études de signe

Exemple

Nous souhaitons connaître le signe de $\dfrac{-3x^2+5x+2}{(2x^2-3x+7)\,.\,(3-2x)}$ pour toutes les valeurs de x.

Cette expression contient deux expressions du second degré : $-3x^2+5x+2$ et $2x^2-3x+7$ et une expression du premier degré : $3-2x$.

Nous savons étudier le signe de chacune de ces expressions.

Il suffit de le faire dans un seul tableau et d'appliquer la règle des signes.

$-3x^2+5x+2$

Deuxième degré $\rho =$ Racines :

$2x^2-3x+7$

Deuxième degré $\rho =$ Racines :

$3-2x$

Premier degré Racine :

Tableau de signes

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		2	
$-3x^2+5x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x^2-3x+7$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{-3x^2+5x+2}{(2x^2-3x+7).(3-2x)}$	$-$	0	$+$	$\mid$	$-$	0	$+$

Interprétation du tableau

$\dfrac{-3x^2+5x+2}{(2x^2-3x+7).(3-2x)}$ est négatif lorsque...

$\dfrac{-3x^2+5x+2}{(2x^2-3x+7).(3-2x)}$ est positif lorsque...

$\dfrac{-3x^2+5x+2}{(2x^2-3x+7).(3-2x)}$ est nul lorsque...

$\dfrac{-3x^2+5x+2}{(2x^2-3x+7).(3-2x)}$ n'existe pas lorsque...

Exercice

3. Étudie le signe des expressions suivantes.

   (a) $2x^2-5x-3$

   (b) $-x^2+x-1$

   (c) $\dfrac{\left(2x^2-3x+7\right).(3-2x)}{-3x^2+5x+2}$

5

(d) $-2.\left(4x^2-4x+1\right).\left(9+x^2\right)$

(e) $\dfrac{\left(-2x^2+x-4\right)^5.\left(x^2-3\right)}{(x+2)^2}$

(f) $\dfrac{3}{3x^3-4x^2+x}$

(g) $\dfrac{\left(2x^2-3x-5\right).(3-2x)}{-3x^2-5x+2}$

(h) $\dfrac{\left(2x^2+x+7\right).(4x-3)}{-3x^2+5x+12}$

(i) $\dfrac{\left(4x^2-4x+1\right).(3-2x)^2}{-3x^2+5x+2}$

Résolution d'inéquations

Exemples

- $2x^3-12x \leq 10x^2$

$2x^3-10x^2-12x \leq 0$

Ce n'est pas une expression du deuxième degré. Je factorise.

$x.\left(2x^2-10x-12\right) \leq 0$

Avec le signe de x, racine 0

et de $2x^2-10x-12$ $\quad\rho = 196\quad$ Racines -1 et 6

je peux trouver le signe de $x.\left(2x^2-10x-12\right)$.

x		-1		0		6	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2-10x-12$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x^3-10x^2-12x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Réponse : $x \leq -1$ ou $0 \leq x \leq 6$

$S =]\leftarrow;-1] \cup [0;6]$

- $\dfrac{4}{x+4} \geq x$

$\dfrac{4}{x+4} - x \geq 0$

$$\frac{-x^2-4x+4}{x+4} \geq 0$$

$-x^2-4x+4$: racines

$x+4$: racine

x							
$-x^2-4x+4$							
$x+4$							
$\dfrac{-x^2-4x+4}{x+4}$							

Réponse :

Exercice

4. Résous les inéquations suivantes.

   (a) $\left(x^2-4x+3\right).\left(-4x^2-1\right)<0$

   (b) $\left(x^2-4\right).\left(x^2-3x+1\right) \geq 0$

   (c) $\left(x^2-4\right)-\left(x^2+3x-2\right)>0$

   (d) $\dfrac{-2x^2+x-1}{2x-3} \leq 0$

   (e) $\dfrac{10x^2-30x}{4x^2-5x+1}>0$

   (f) $\dfrac{(x+2).\left(25x^2-16\right)}{-x^2+6x-9} \geq 0$

   (g) $\dfrac{2.\left(x^2-2x-3\right)^4}{(x-9)^5.\left(-x^2+x-2\right)} \leq 0$

   (h) $\dfrac{8-x^2}{x^3}<0$

   (i) $x(x+2)>3x$

   (j) $(x+1)^2+(x-1)^2+x^2<4-x$

   (k) $(x-3)^2 \geq 25$

   (l) $16-x^4 \leq 0$

(m) $x^3 < 4x$

(n) $2x^3 - 3x^2 - 3x - 18 > 0$

(o) $3x^3 - 5x + 14 \leq 0$

(p) $2x^3 - x^2 - 10x + 5 > 0$

(q) $\frac{x}{2} \geq \frac{2}{x}$

(r) $\frac{x-1}{2x} \geq \frac{1}{x+2}$

(s) $\frac{1}{x-1} > \frac{3}{x+1}$

(t) $\frac{x-5}{x-3} \leq \frac{x+2}{x-1}$

(u) $\frac{x^2+14}{x^2+6x+8} \leq 1$

(v) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} > 1$

(w) $\frac{x^2-12}{x^2+x-6} \leq \frac{2}{x+3}$

(x) $\frac{2x^2-2}{10x^2-13x-3} + \frac{3x-2}{2x-3} \leq 1$

(y) $\frac{x^2-6x+5}{x^2-9x+14} \geq 1$

(z) $\frac{4x^2-23}{x^2-4x+3} - \frac{3x-1}{x-1} \geq 2$

Comparaison de fonction

Exercice

Considérons les fonctions f, g et h définies par $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, et $h(x) = x^3$.
Indique le domaine où

1. $f > g$
2. $g > h$
3. $h > f$

5

4. $g \geq f$

5. $h \leq f$

Chapitre 6

Géométrie dans l'espace

Table des matières

Objectifs

CONNAÎTRE

• Repérer les positions relatives de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

APPLIQUER

• Représenter dans un plan un objet de l'espace.

• Construire un point de percée.

• Construire une section plane.

TRANSFÉRER

• Justifier la construction d'un point de percée, d'une section plane.

• Vérifier la coplanarité de points, de droites.

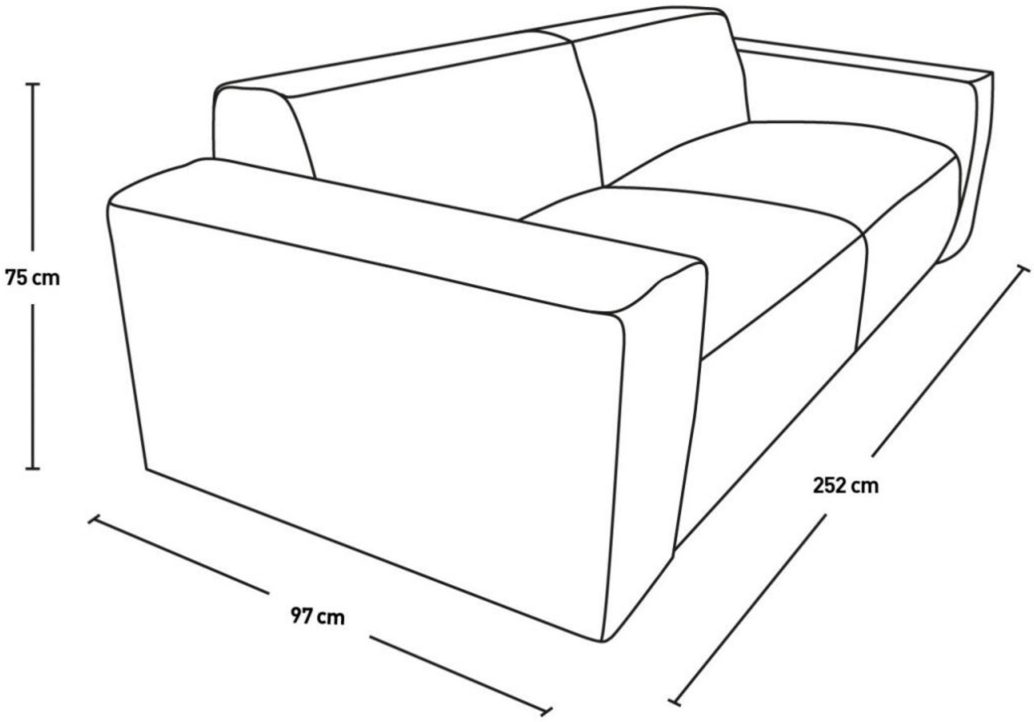
• Construire l'ombre d'un objet.

• Interpréter une représentation plane d'un objet de l'espace.

6.1 Perspective

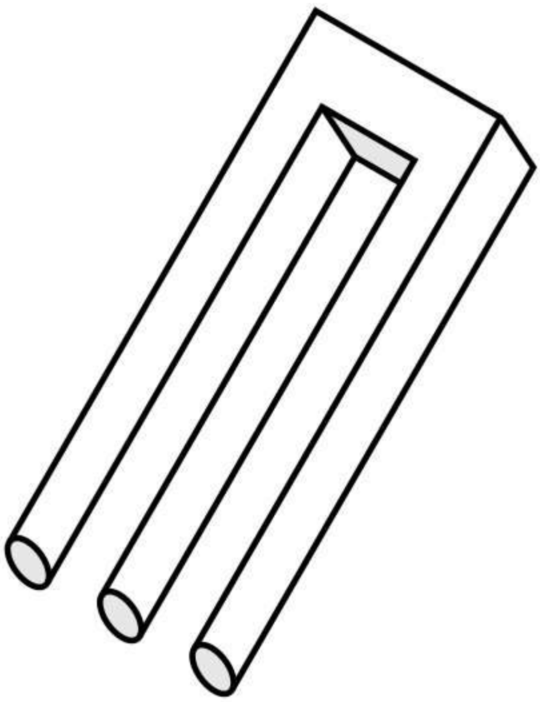
Incursion

Nous vivons dans un espace à 3 dimensions.
Depuis le temps des cavernes, l'homme veut représenter des objets sur un plan.
Allons acheter un meuble.

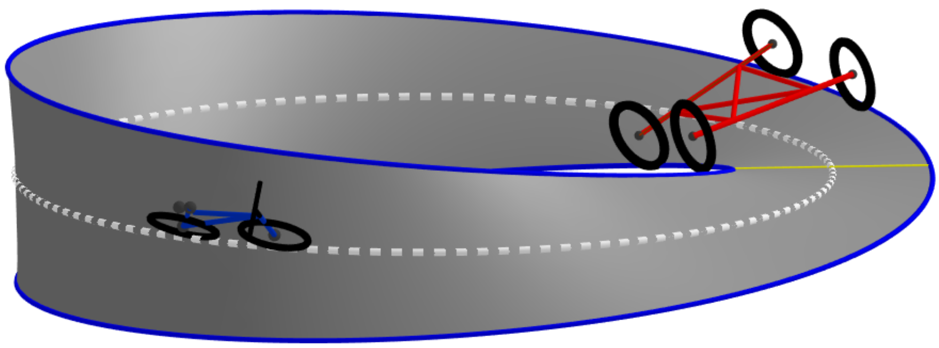


Largeur, profondeur et hauteur sont les 3 dimensions d'un meuble.

Représenter cela paraît facile, et pourtant...



Sans oublier le ruban de Moebius.



Retrouve l'excellente animation de Daniel Mentrard sur :

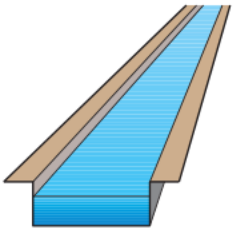
https ://www.geogebra.org/m/qkdp4ajn

Comment faire ?

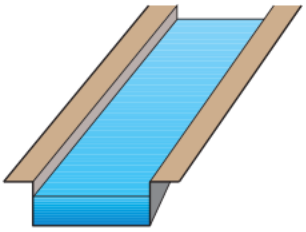
Nous allons représenter des parallélépipèdes et des pyramides en perspective cavalière.

Dans cette méthode, des droites parallèles dans l'espace sont représentées par des droites parallèles sur le dessin.

Notre œil (et nos appareils photo) ne réalisent pas de perspective cavalière.

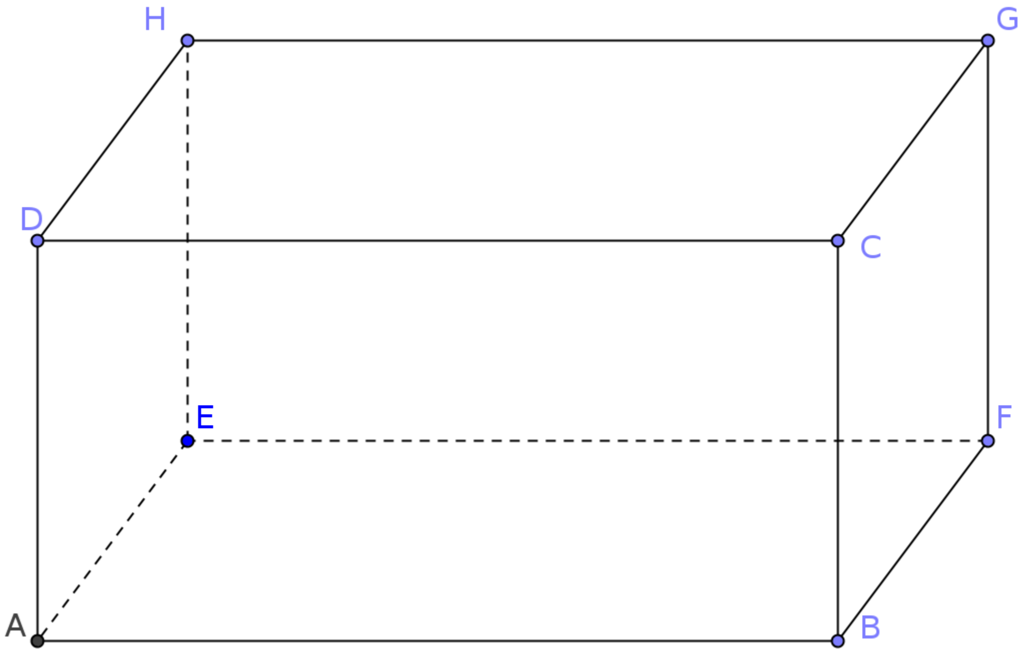


Un canal rectiligne dont les deux bords, dans la vision classique, se rejoignent à l'horizon, est représenté en perspective cavalière par des droites parallèles. Ce schéma perspectif ne correspond nullement dans son principe à une vision spontanée.



Parallélépipède

Le parallélépipède $ABCDEFGH$ est représenté ci-dessous en perspective cavalière.



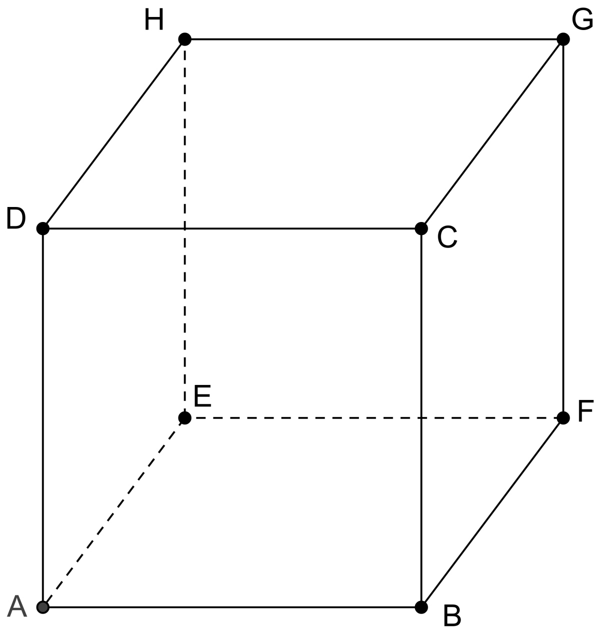
Les plans ABC et EFG sont des plans frontaux.

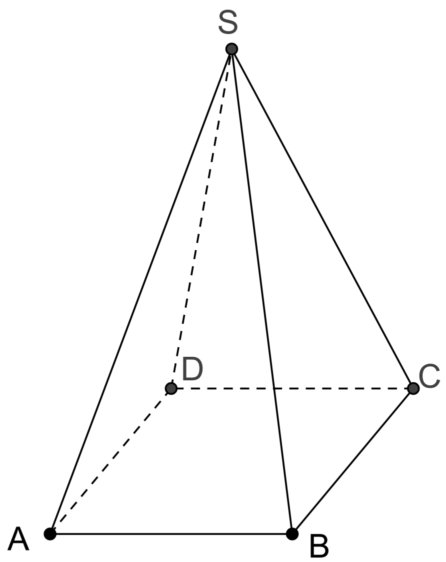
La droite AE est perpendiculaire à un plan frontal.

L'angle $\widehat{BAE}$ est l'angle de fuite. Il n'est pas droit, contrairement à la réalité.

6

Cube et pyramide





Exercice

1. En utilisant le quadrillage ci-dessous, représente en perspective cavalière

   (a) un cube de côté 5

   (b) un parallélépipède à base carrée de côté 6 et de hauteur 5

   (c) une pyramide à base carrée de côté 6 et de hauteur 5

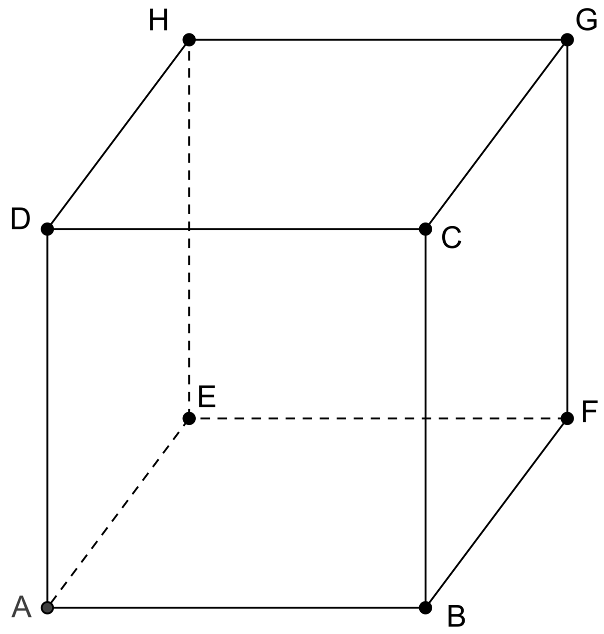
(d) un tétraèdre dont la base est un triangle équilatéral de côté 6 et de hauteur 5.

6.2 Positions relatives

Plans

Un plan peut être défini par 3 poins non alignés.

Exemple



Le plan ABC, qui est le plan de la face avant.

Un plan peut être défini par un droite et un point n'appartenant pas à cette droite

Exemple : la droite AB et le point F, qui est le plan de la base inférieure.

Un plan peut être défini par 2 droites parallèles.

Exemple : les droites AB et GH ; ce plan coupe le cube en deux.

Un plan peut être défini par 2 droites sécantes.

Exemple : les droites DE et AH, qu est le plan de la face gauche.

6

Exercice

2. Avec ce même cube,

   (a) donne 4 exemples de plan, un pour chaque définition.

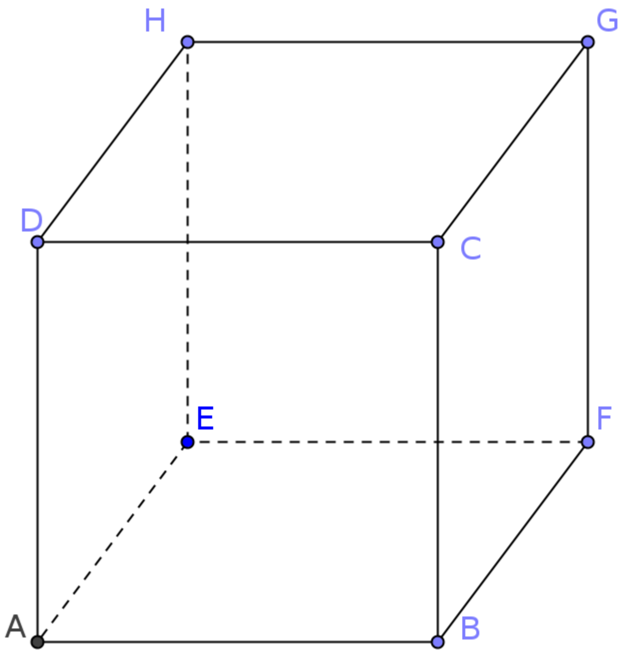
   (b) Existe-t-il un plan qui contient les points C, D, E et F ?

   (c) Existe-t-il un plan qui contient les points A, B, D et F ?

Positions relatives de deux plans

Dans l'espace, deux plans peuvent être parallèles ou sécants.

Exercice



3. Dans le cube représenté, quelle est la position relative des plans

   (a) AEF et BCG ?

   (b) AEF et DCF ?

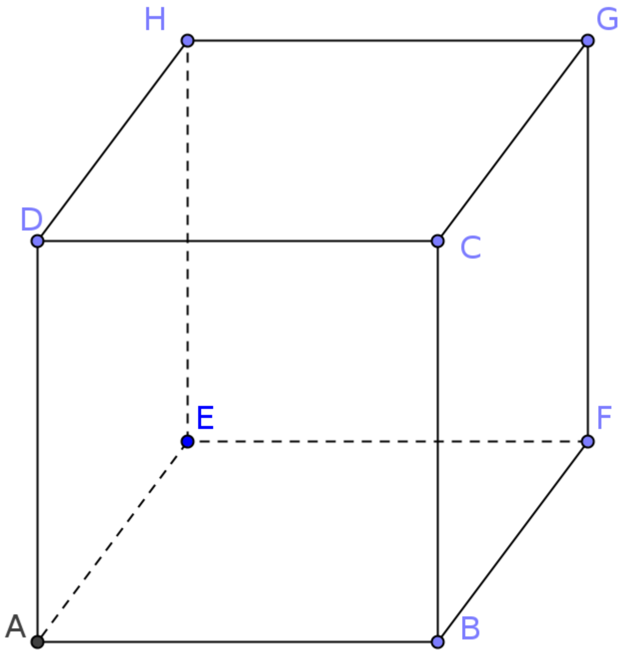
   (c) DGE et CAF ?

Position relative d'un plan et d'une droite

Le plus souvent, une droite et un plan ont un point commun. On l'appelle le point de percée de la droite dans le plan.

Sinon, le plan et la droite sont parallèles.

Exercice



4. Dans le cube représenté, quelle est la position relative

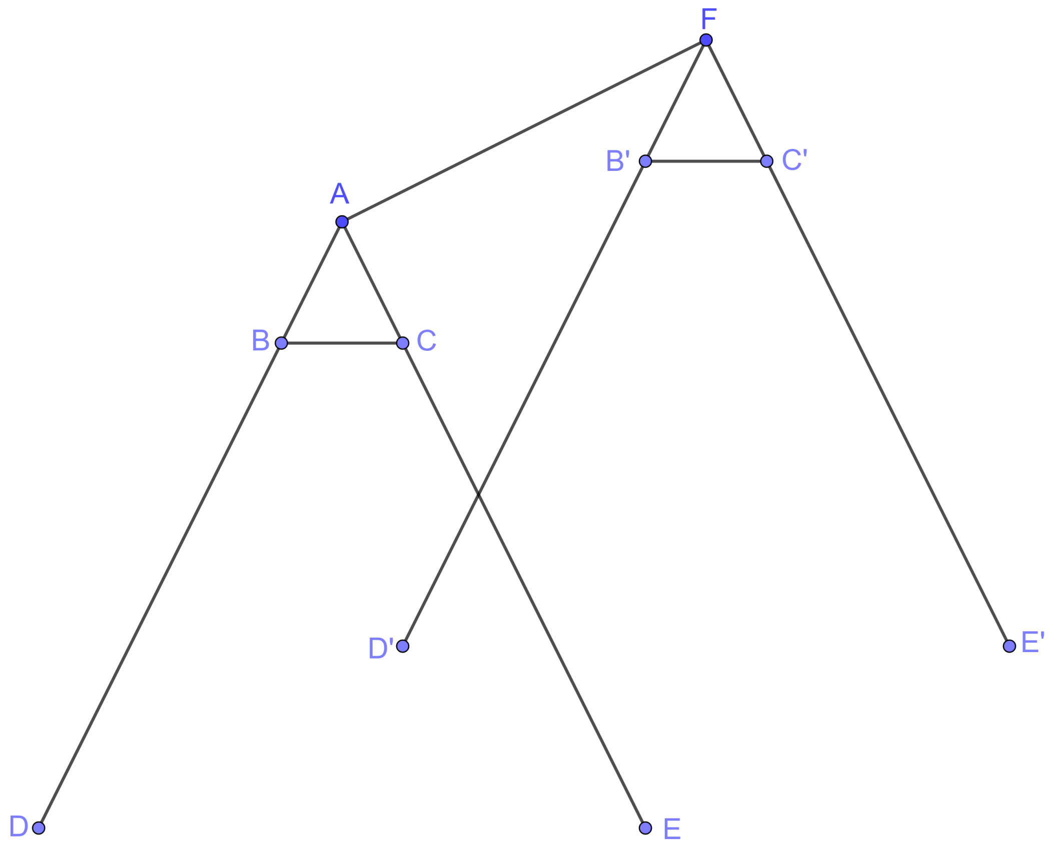
   (a) du plan AEF et de la droite BC ?

   (b) du plan AEF et de la droite BD ?

   (c) du plan DGE et de la droite AF ?

Position relative de deux droites

Allons jouer à la balançoire.



Ah zut ! J'ai oublié les balançoires ! Faisons de la géométrie dans l'espace.

Les droites BC et $B'C'$ sont parallèles.

Les droites AD et FD' sont parallèles.

Les droites AD et AF sont sécantes.

Les droites AD et FE' sont

Les droites AD et FE' ne sont pas dans un même plan.

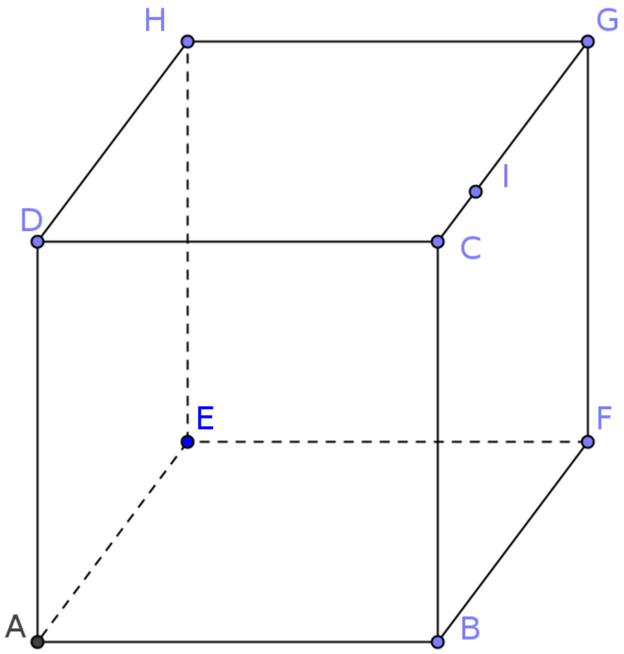
Le plan ADF est percé par la droite FE'.

NB

Deux droites gauches sont deux droites qui ne sont pas coplanaires, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être incluses dans un même plan.

6

Exercices



5. Dans le cube représenté, quelle est la position relative des droites

   (a) HG et DI ?

   (b) HG et AF ?

   (c) HG et DA ?

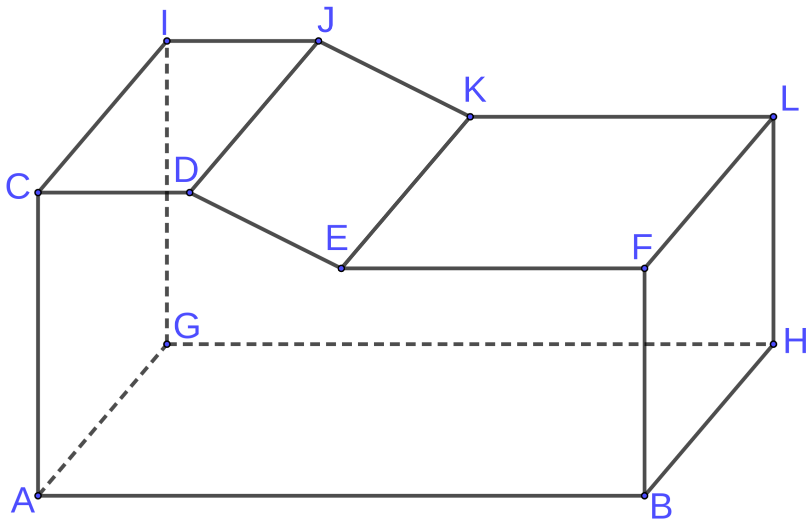
   (d) HB et AG ?

   (e) HC et AF ?

   (f) HC et EB ?

   (g) BI et DG ?

6. Voici un solide. Quelle est la position relative de



(h) la droite AB et la droite EF ?

(i) la droite AB et la droite DE ?

(j) la droite CD et la droite EK ?

(k) le plan ABC et le plan DEK ?

(l) le plan ABC et le plan DEF ?

(m) le plan DEK et le plan ABG ?

(n) le plan IJC et la droite BF ?

(o) le plan BFH et la droite IC ?

(p) la droite JK et la droite CD ?

(q) la droite GI et la droite CD ?

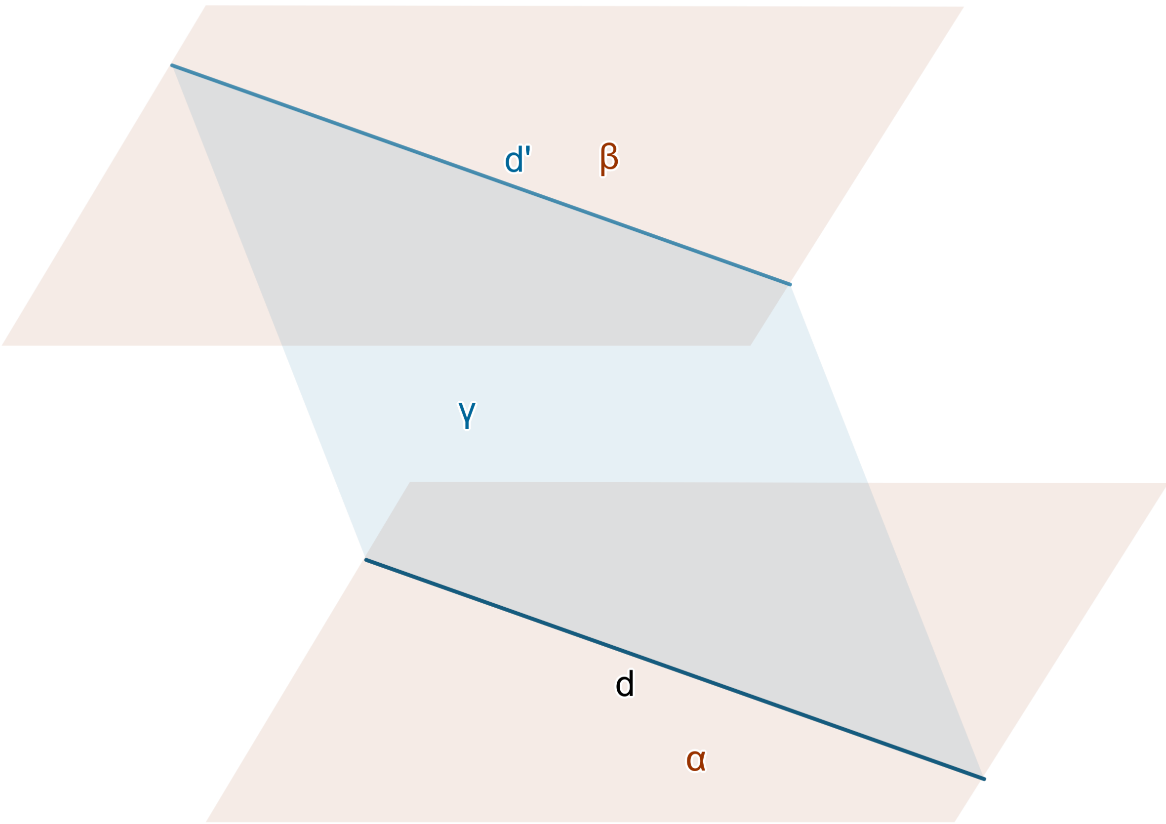
6.3 Sections planes

Théorème préliminaires

Voici deux théorèmes qui seront utiles dans la suite.

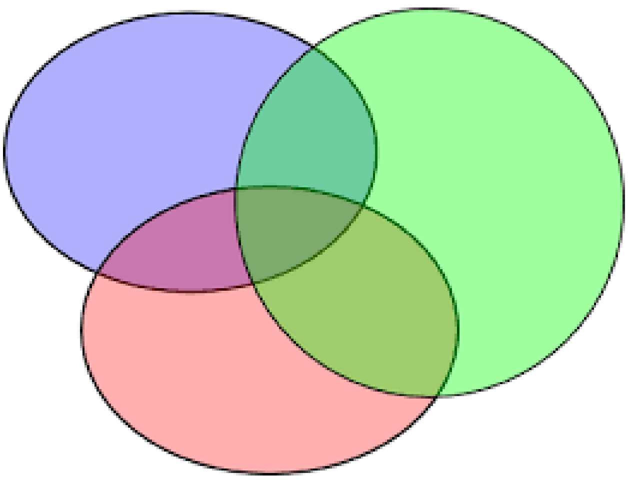
Si un plan coupe 2 plans parallèles, il les coupe suivant 2 droites parallèles.

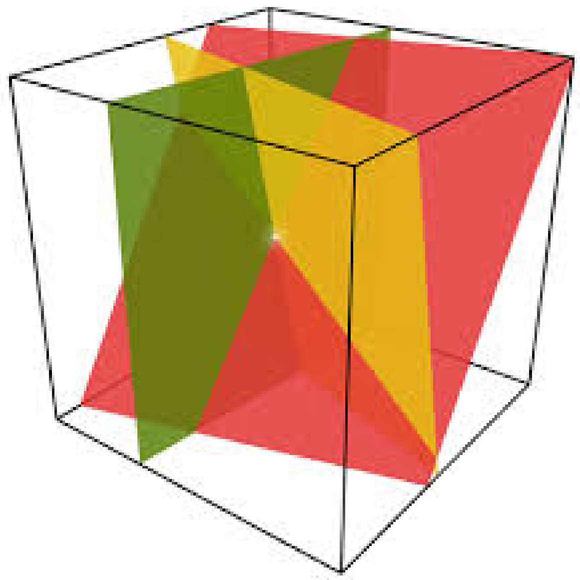
Démonstration : C'est évident puisque les 2 intersections sont coplanaires et n'ont pas de point commun.



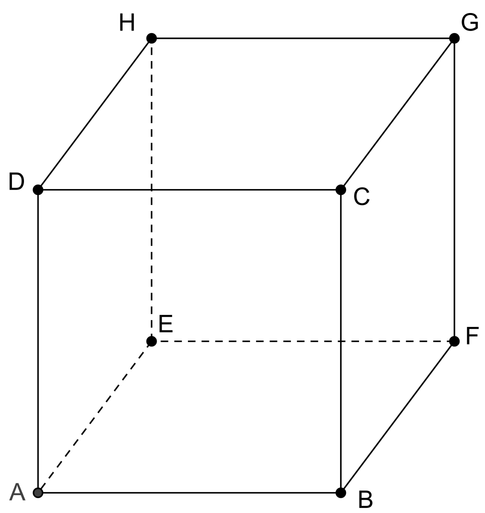
Si un plan coupe 2 plans sécants,
les deux intersections se coupent sur l'intersection des deux plans.

Démonstration : C'est une propriété des ensembles, illustrée ci-dessous.





Faces du cube et perspective cavalière



$ABCDEFGH$est un cube dont la face $ABCD$ est frontale, c'est à dire parallèle à la feuille de papier. Dans la suite, nous l'appellerons face "avant".

Dans la réalité	Sur le dessin
$[AB]$ et $[EF]$ sont des arêtes parallèles à la feuille.	Elles sont représentées en vraie grandeur.
$[BE]$ est une arête orthogonale à la feuille. Les arêtes $[AB]$ et $[BE]$ ont même longueur.	$[BE]$ est oblique. $[AB]$ et $[BE]$ n'ont pas même longueur.
Les diagonales BH et CG sont parallèles.	Elles sont représentées par des droites parallèles.
Les points D, I, F sont alignés.	Les points D, I, F sont alignés.
I est le milieu de $[DF]$.	I est le milieu de $[DF]$.

La face $AHGD$ est appelée face gauche.

La face $BEFC$ est appelée face droite.

La face $HEGF$ est appelée face arrière.

La face $ABEH$ est appelée face inférieure.

La face $DCFG$ est appelée face supérieure.

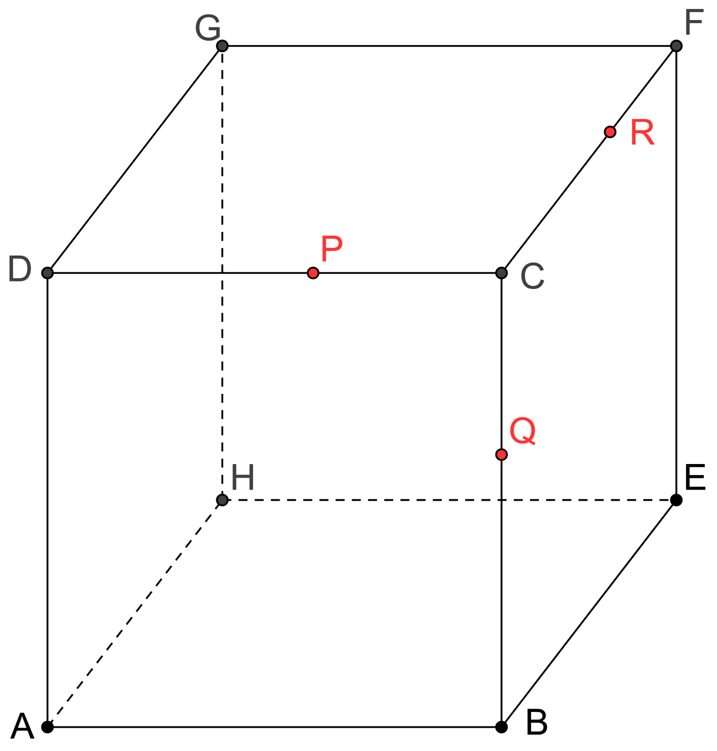
Exercices

Dans chacun des cas, il s'agit de construire la section du cube par le plan PQR.

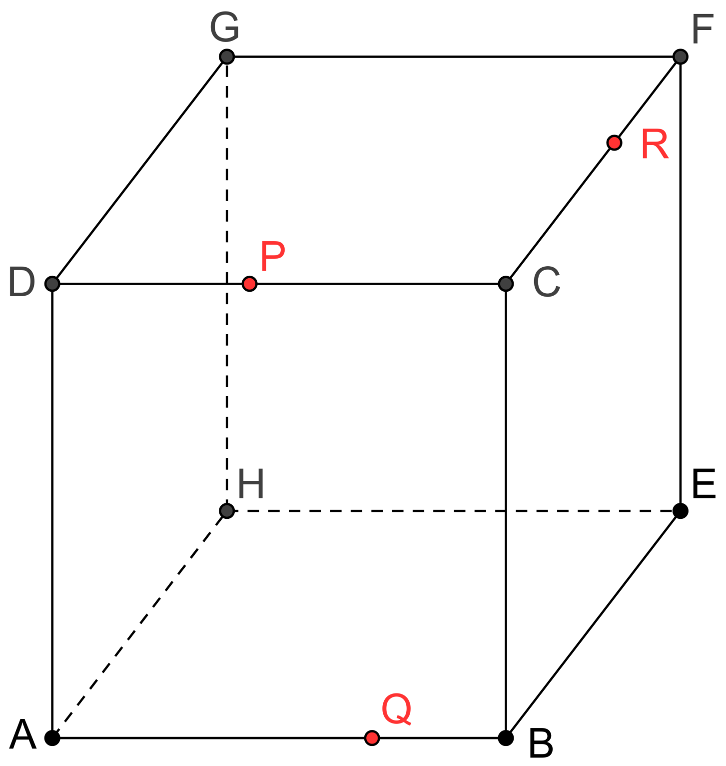
Cette section doit être justifiée à l'aide des axiomes et des théorèmes vus précédemment.

Travaille face par face !

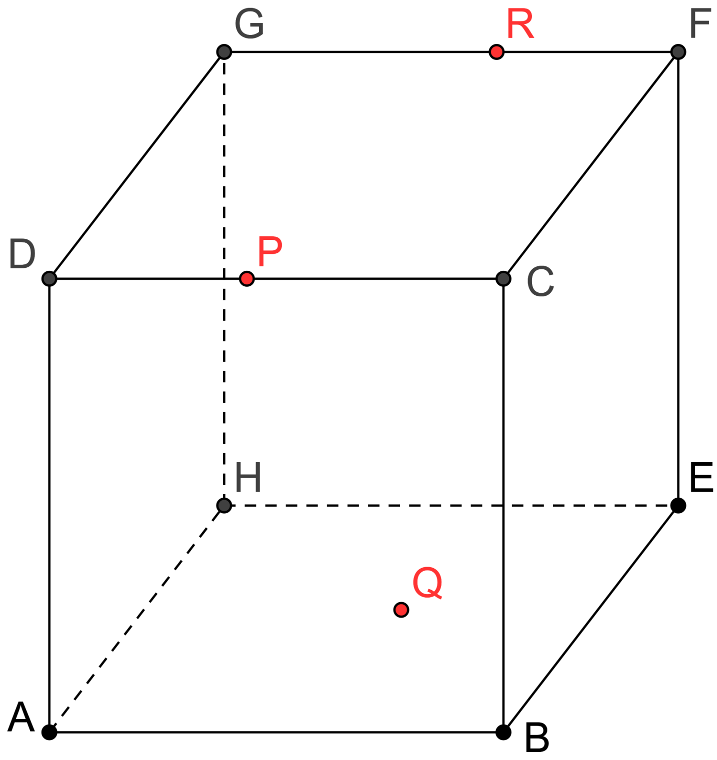
7.



8.

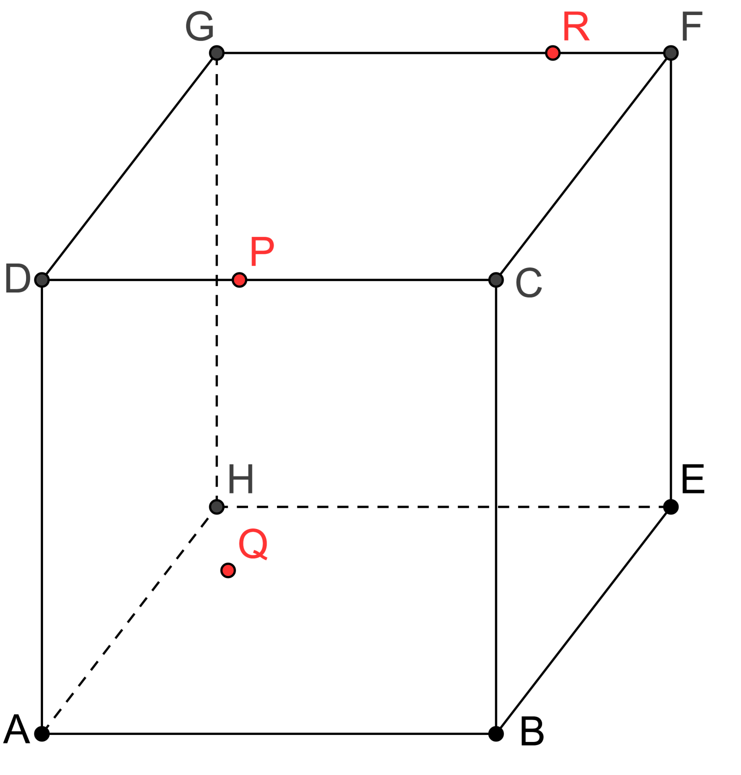


9.



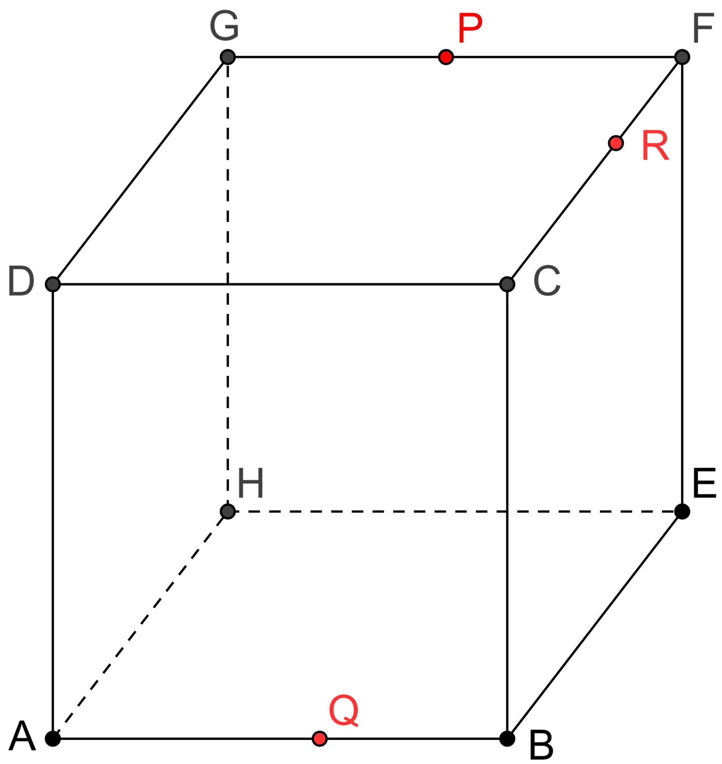
$Q \in BEHA$

10.



$Q \in BEHA$

11.



6.4 Point de percée

Le point de percée d'une droite dans un plan est le point commun de cette droite et du plan ; autrement dit, leur point d'intersection.

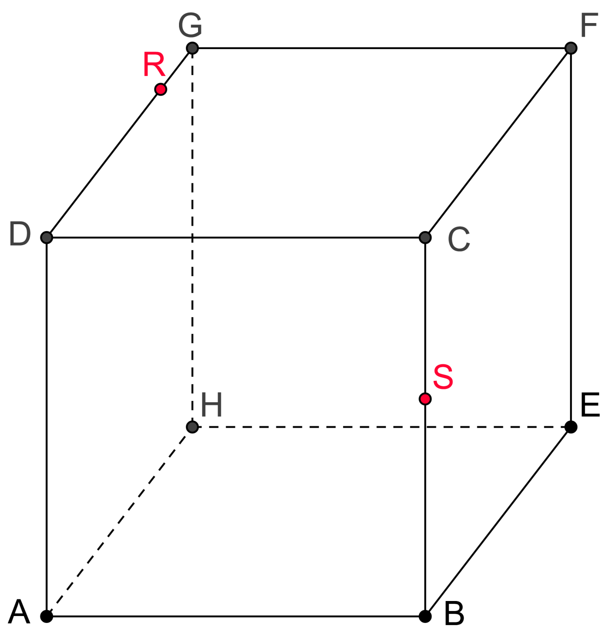
Pour déterminer le point de percée d'une droite dans un plan, suis cette méthode :

1. Choisis un plan comprenant la droite donnée.
2. Trace la droite d'intersection de ce plan avec le plan donné.
3. Déterminez le point d'intersection de cette droite avec la droite donnée.

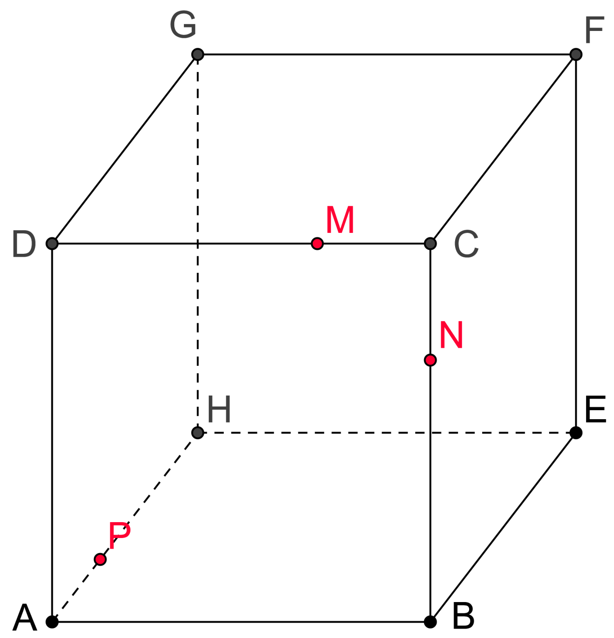
Exercices

Détermine le point de percée de

1. la droite RS dans le plan $ABEH$



2. la droite BE dans le plan MNP.



6

6.5 Critères de parallélisme

Réalité et modèle

Lorsque nous utilisons notre curiosité, nous observons un tas de choses dans notre univers à 3 dimensions.

Le mathématicien veut créer un modèle, censé représenter le monde qui nous entoure.

Le cours de géométrie fixe donc les « règles du jeu » d'une théorie qui doit représenter l'espace physique qui nous entoure.

Ces règles du jeu, les axiomes, sont admis de tous. En les acceptant, on fait de la géométrie dans l'espace, tout comme en acceptant les règles du jeu de belote, on joue à la belote.

Ensuite, il reste à trouver et démontrer les propriétés de notre modèle mathématique. Si ces propriétés sont celles de l'espace qui nous entoure, le modèle est bon.

Ces axiomes se trouvent dans la section 7.3 (deuxième partie).

Axiome d'Euclide

Ce célèbre axiome s'énonce :

Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule parallèle à la droite.

Pourquoi célèbre ?

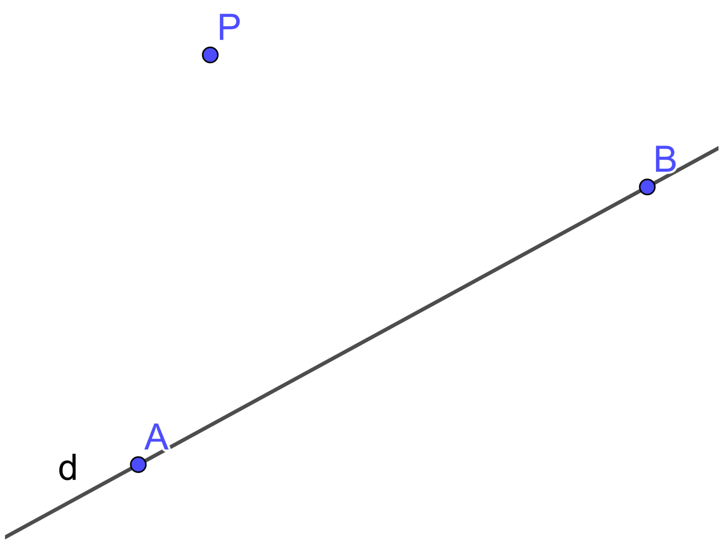
Parce qu'il est admis en géométrie plane.

Il ne fait pas partie de « nos » axiomes de géométrie dans l'espace.

Démontrons-le.

Démonstration Il est tentant d'appliquer l'axiome 4.

Appelons les données d et P.



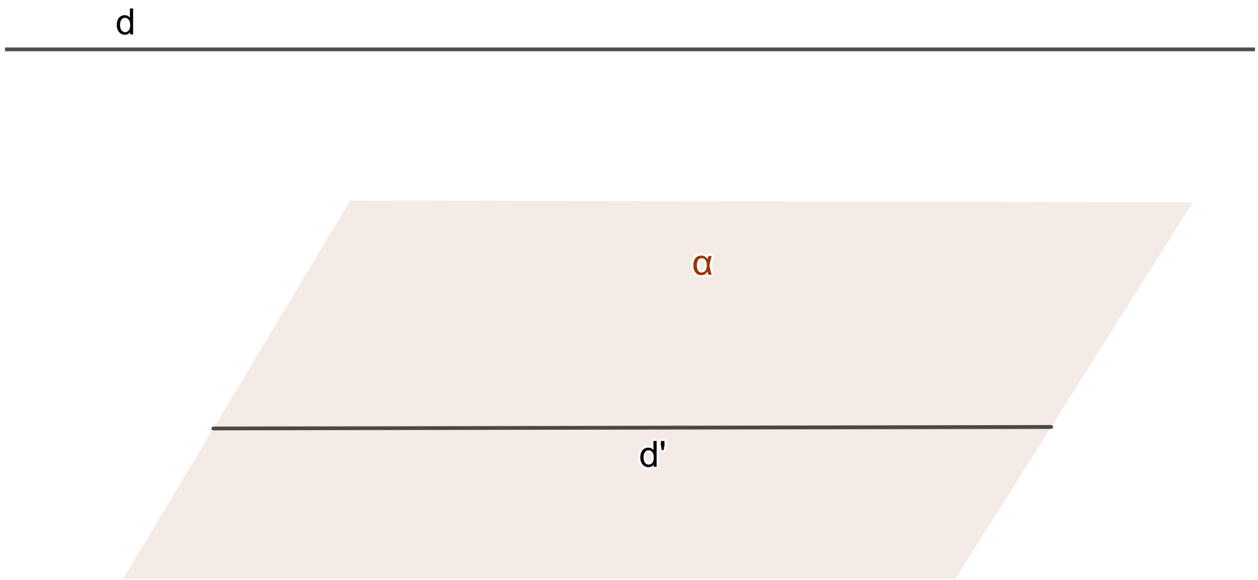
d et P sont-ils inclus dans un même plan ?

Pour définir ce plan, disons α, il suffit de prendre 2 points de la droite d en plus du point P (Axiome3). L'axiome 7 nous garantit que la droite d est incluse dans α, et le tour est joué.

Toutes les données sont dans un même plan, donc l'axiome d'Euclide (partie de l'axiome 4) s'applique bel et bien (n'oublie pas que des droites parallèles sont avant tout coplanaires).

Critère de parallélisme

- Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite du plan.



Mais au fait, c'est quoi ce « ssi » ?

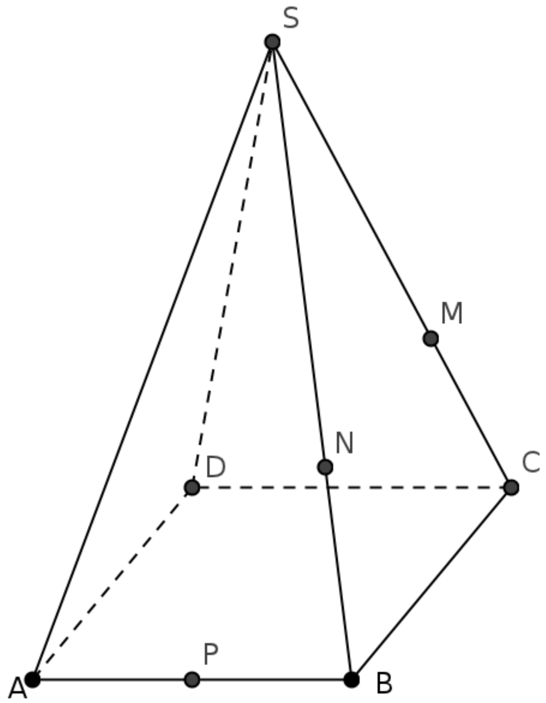
Si et seulement si sépare deux propositions qui sont vraies en même temps et fausses en même temps.

Ainsi, si la droite d n'est parallèle à aucune droite du plan α, elle n'est pas parallèle au plan.

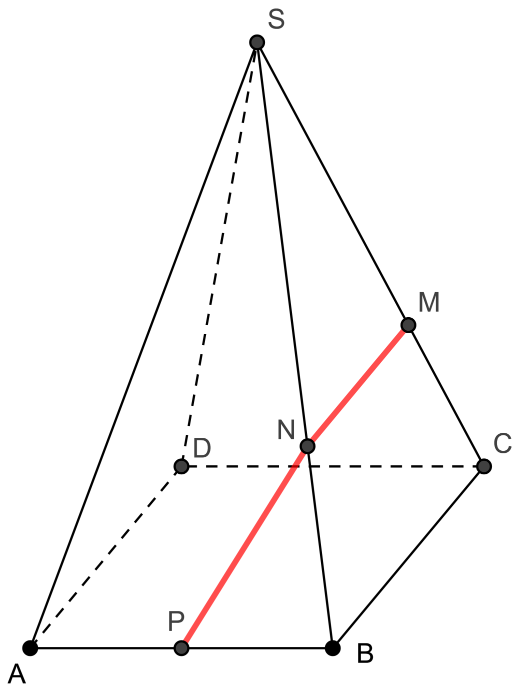
Cette section du chapitre est très théorique.
Faisons une petite section plane
pour nous détendre.

Il s'agit ici aussi de déterminer la section de la pyramide à base carrée ABCDS par le plan MNP.

M est au tiers de [SC] et N est au tiers de [SB]. P est le milieu de [A,B].



Deux faces sont évidentes :

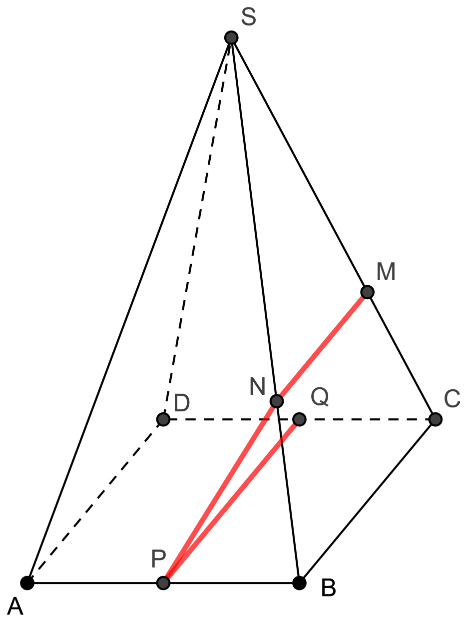


Cherchons la section de la base de la pyramide.

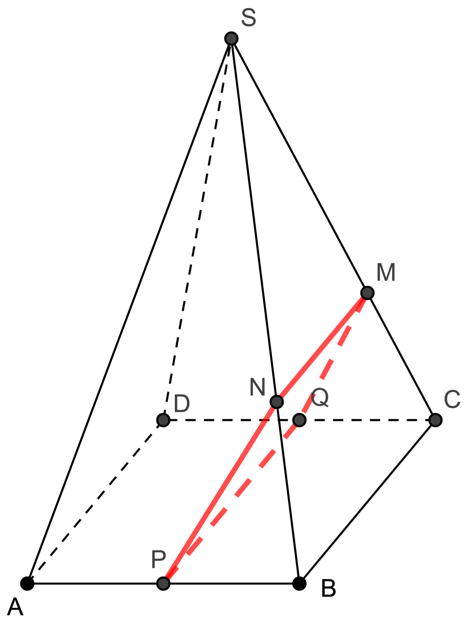
MN est parallèle à la droite BC de ce plan (Axiome 4).

Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite du plan, donc MN est parallèle à la base de la pyramide.

MN n'a pas de point commun avec la section PQ cherchée.



PQ est parallèle à MN. Terminons la section.

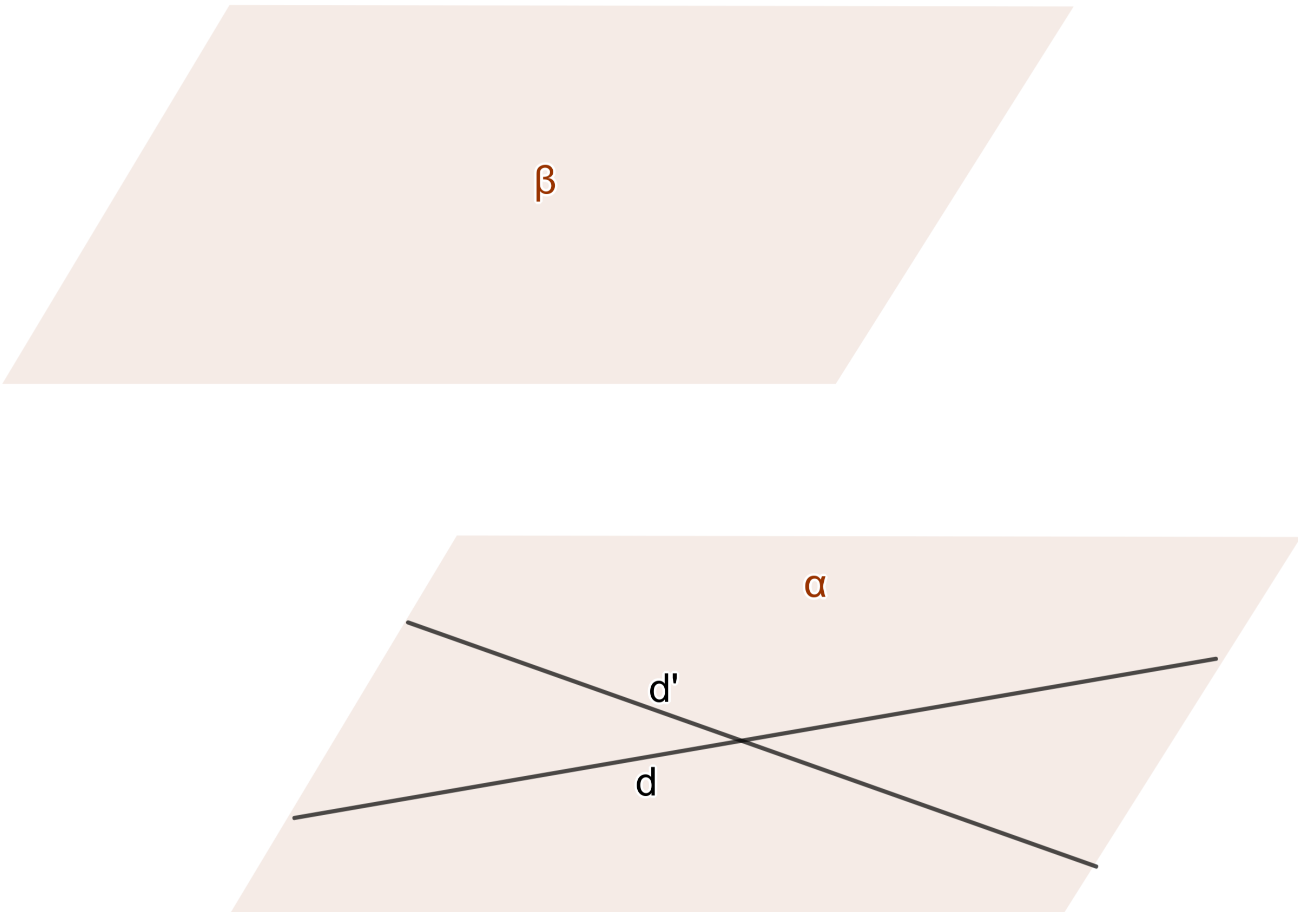


Au passage, nous avons démontré que

Si un plan inclut une droite parallèle à un autre plan, l'intersection des deux plans est parallèle à cette droite (ou ils sont parallèles).

Critère de parallélisme

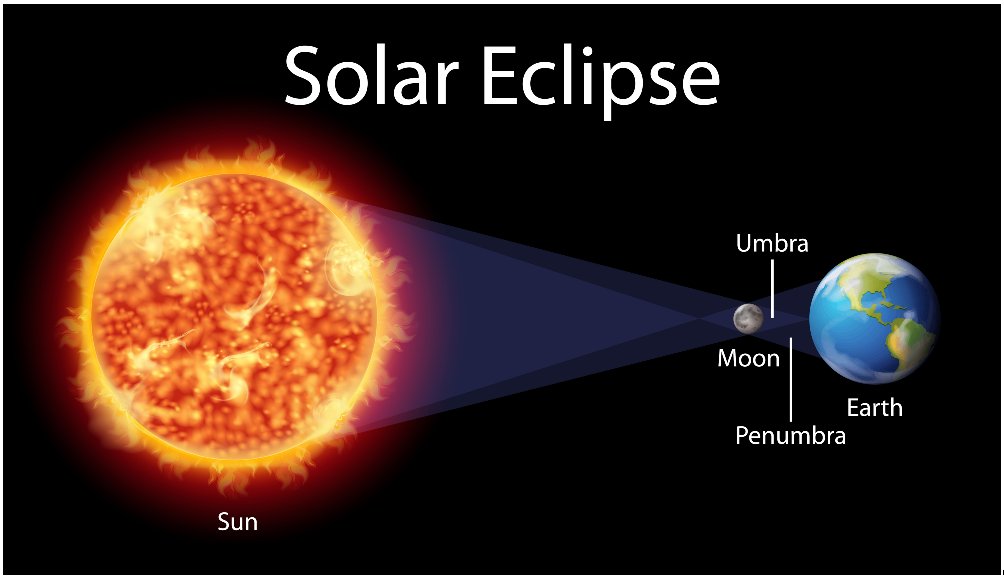
- Deux plans sont parallèles ssi l'un d'eux est parallèle à deux droites sécantes de l'autre.



6.6 Ombre

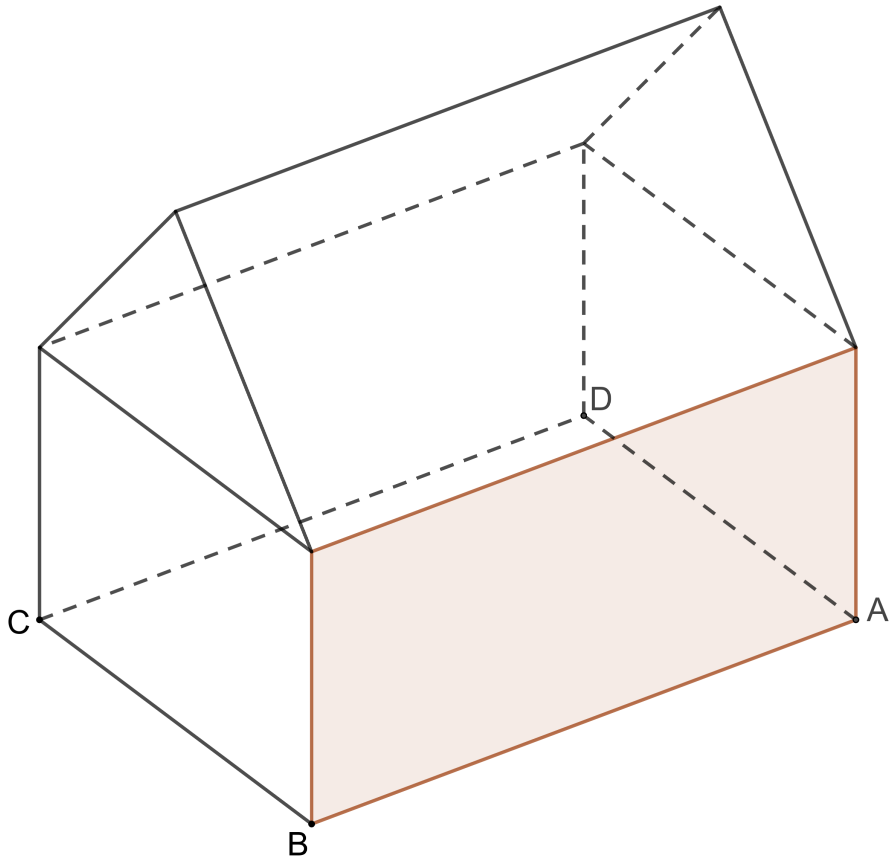
Une source de lumière, un objet, un écran : voilà de quoi faire une ombre.

La plus célèbre est



.

Restons sur terre et prenons une maison comme objet.



L'ombre portera sur le plan ABCD, supposé parfaitement horizontal.

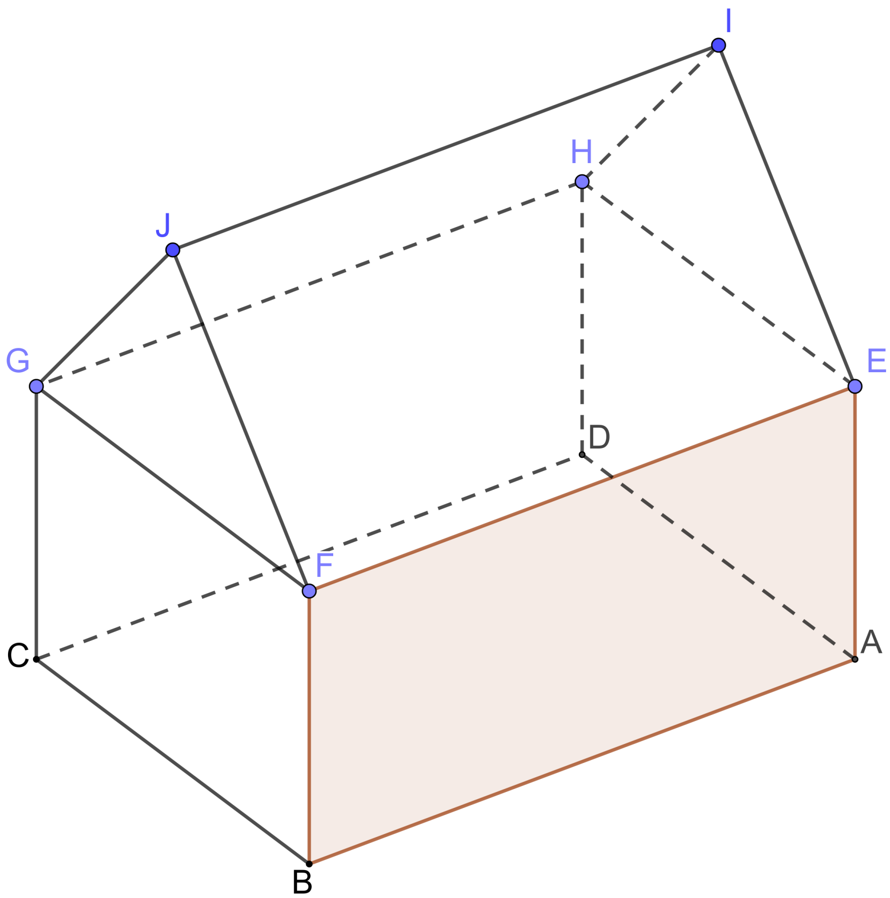
Il manque une chose : le soleil.
Et ça se complique !
Pourquoi ? Parce qu'il est impossible de t'expliquer sur cette feuille où il se trouve.
Il faut le faire avec des mots. J'essaye.

La position du soleil se donne à l'aide d'un angle ou d'une position horizontale et d'une angle vertical au dessus de l'horizon.

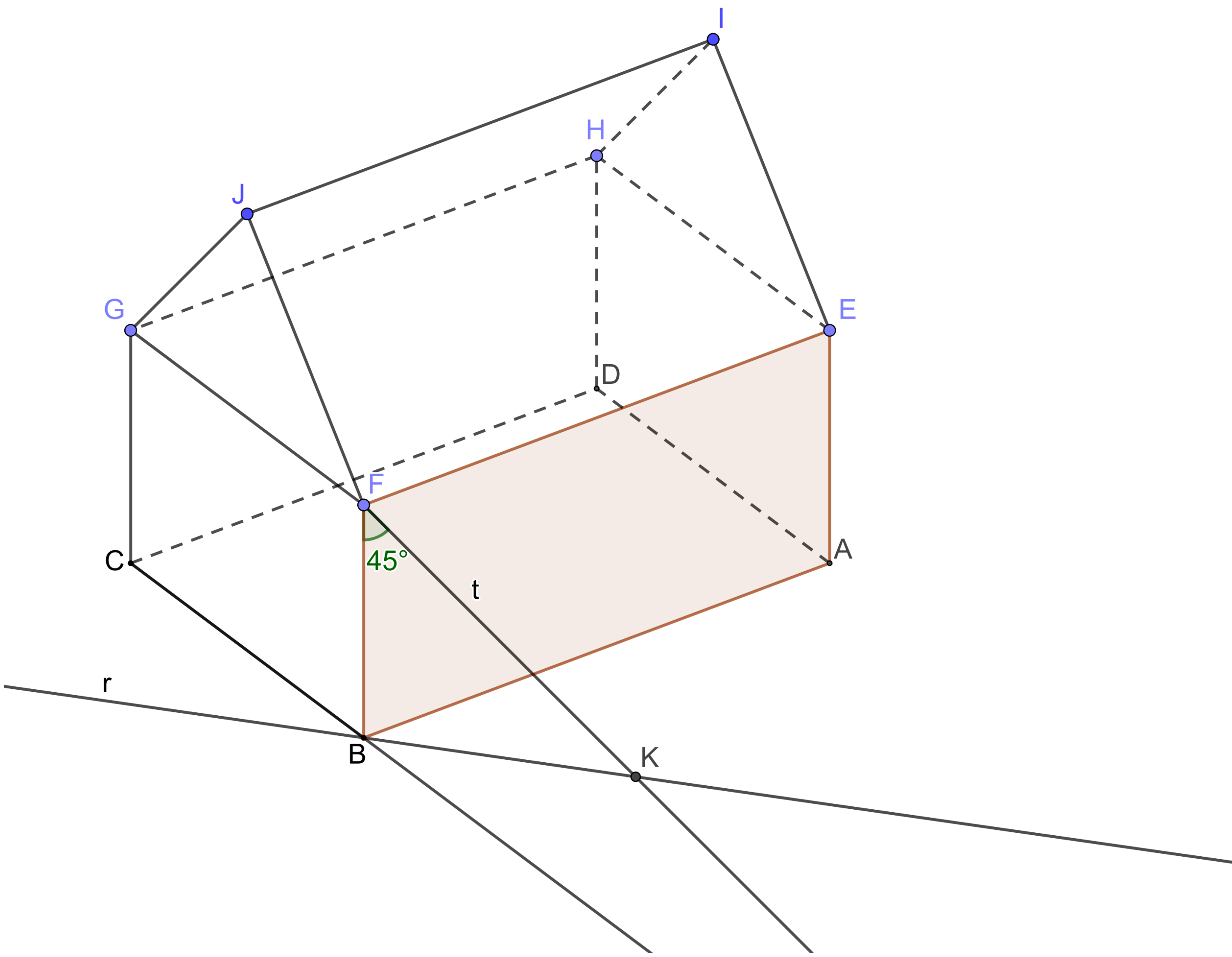
Exemple

Le soleil se trouve au niveau de l'arête verticale du point C et avec une élévation de 45°.

L'objectif est de trouver l'ombre des 6 sommets de la maison qui ne sont pas au sol, c'est-à dire les 6 sommets du toit.



Je commence par F.



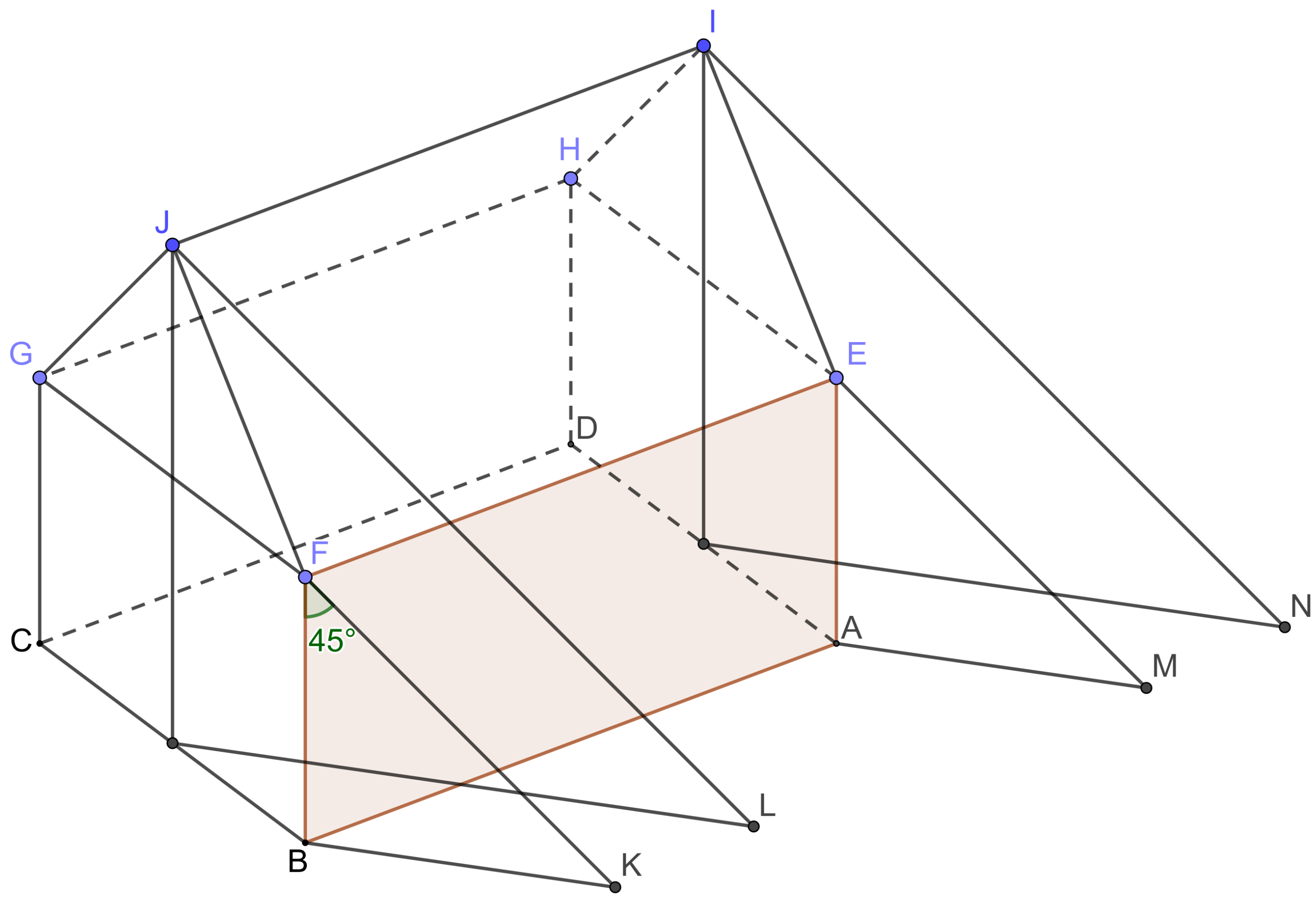
Je crée un triangle dont un côté est la verticale passant par F,

un autre côté est la bissectrice r de l'angle B de la maison, car le soleil est en face de l'arête verticale de C,

et le troisième côté est le rayon de soleil t à 45°.

J'obtiens le point K.

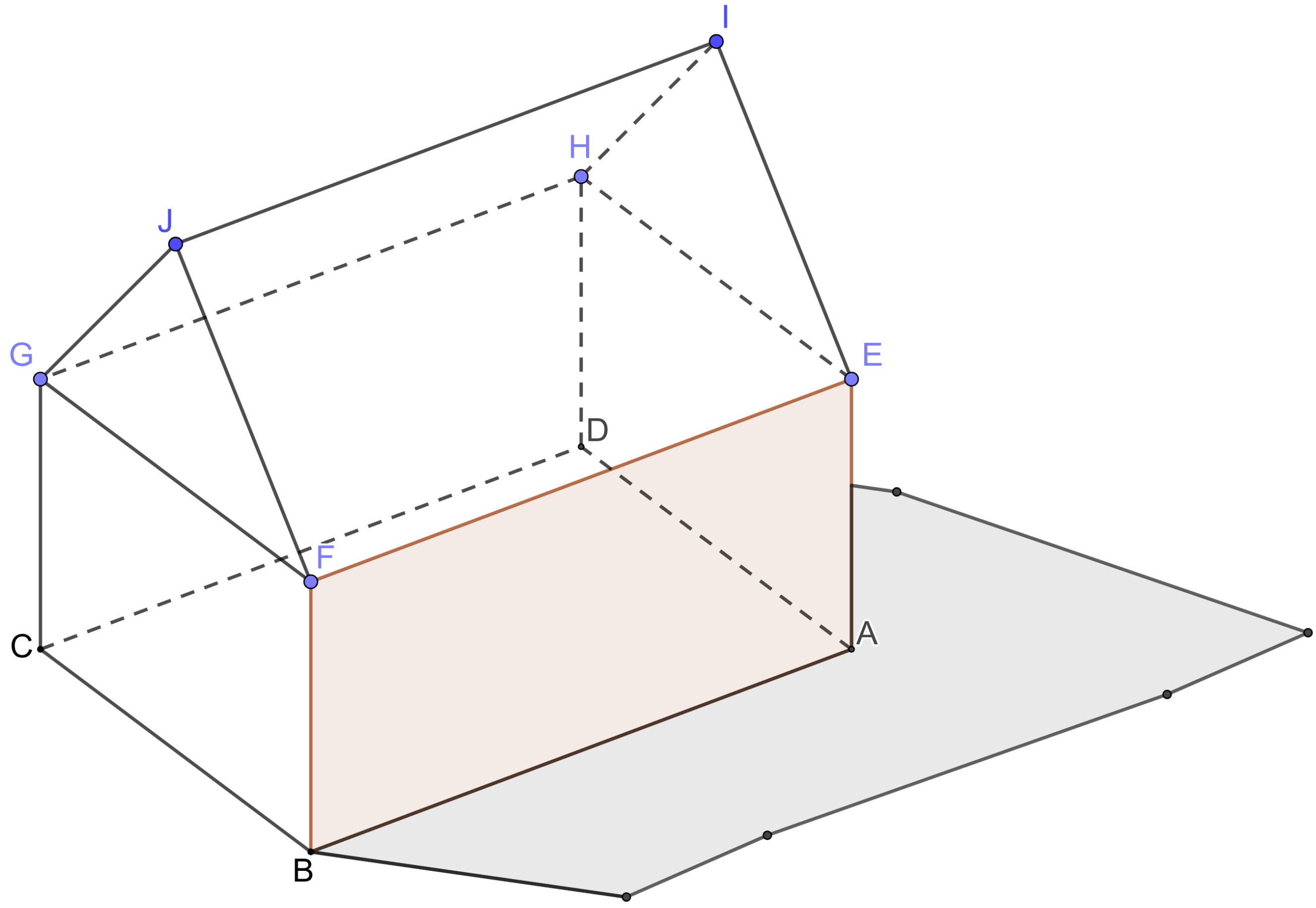
Continuons avec d'autres sommets, à l'aide de côtés parallèles à ce premier triangle.



Inutile de traiter le point G : le soleil ne traverse pas la maison.

Que donne le point H ?

Voici la solution.

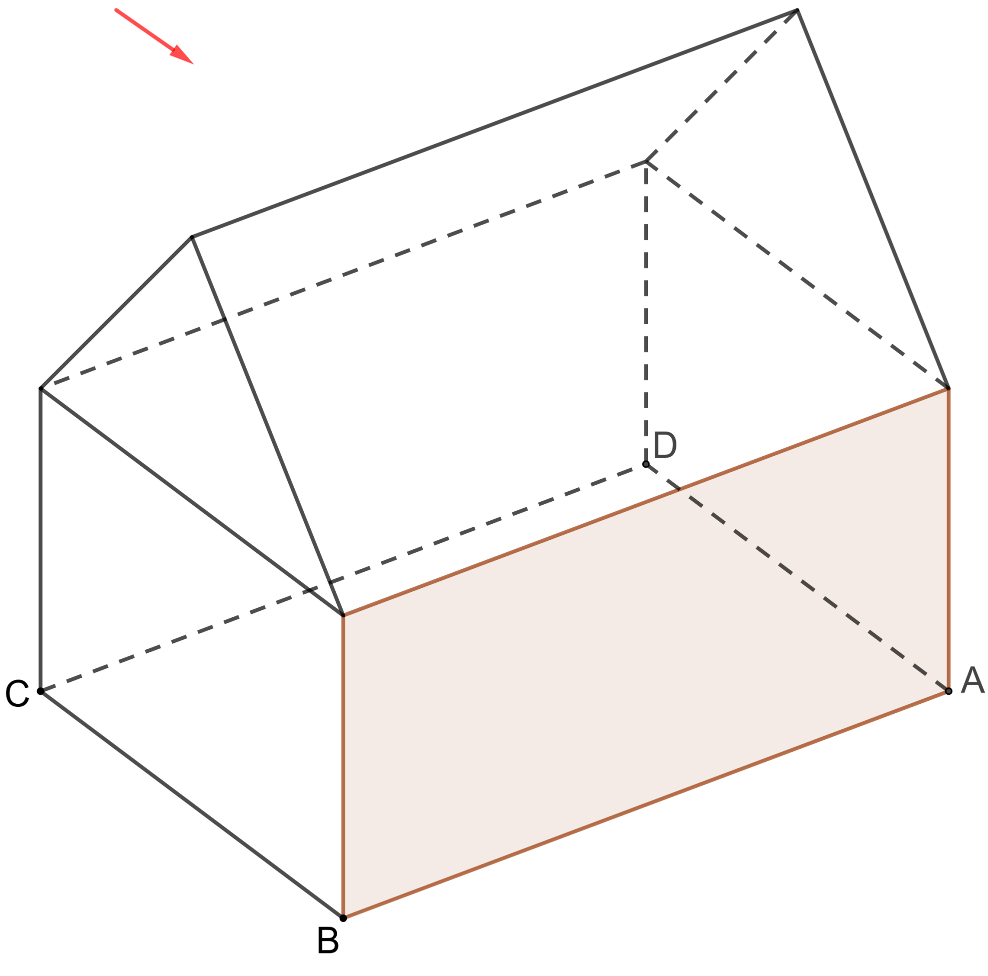

I
H
J
G
E
D
F
C
A
B

Exercices

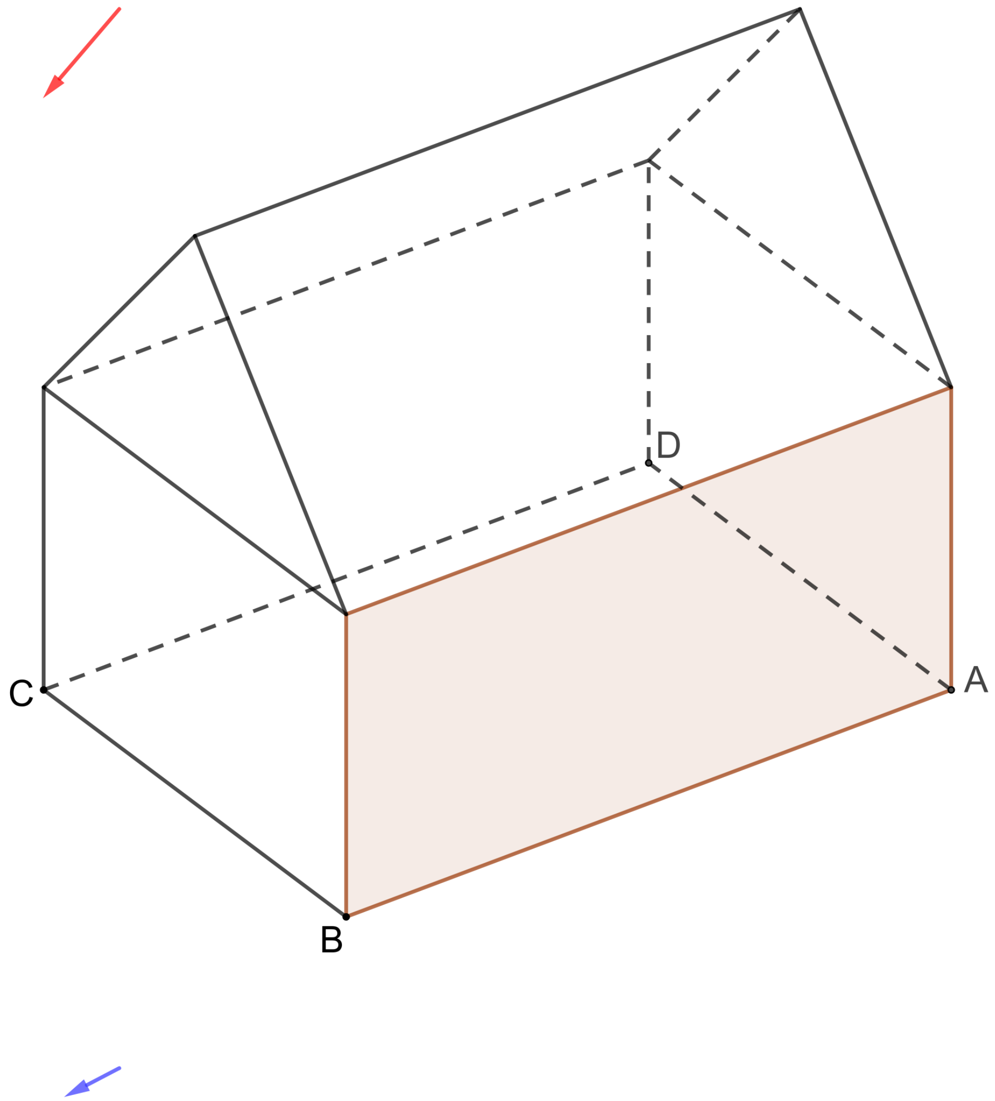
Dans chaque exercice, il s'agit de trouver l'ombre de la maison portée dans le plan horizontal ABCD.

Seule le position du soleil change par rapport à l'exemple.

1. La direction horizontale du soleil est indiquée par la flèche bleue.
Son élévation est donnée par la flèche rouge.



2. La direction horizontale du soleil est indiquée par la flèche bleue.
Son élévation est donnée par la flèche rouge.



partie II

Retenir et appliquer

6

Chapitre 1

Trigonométrie

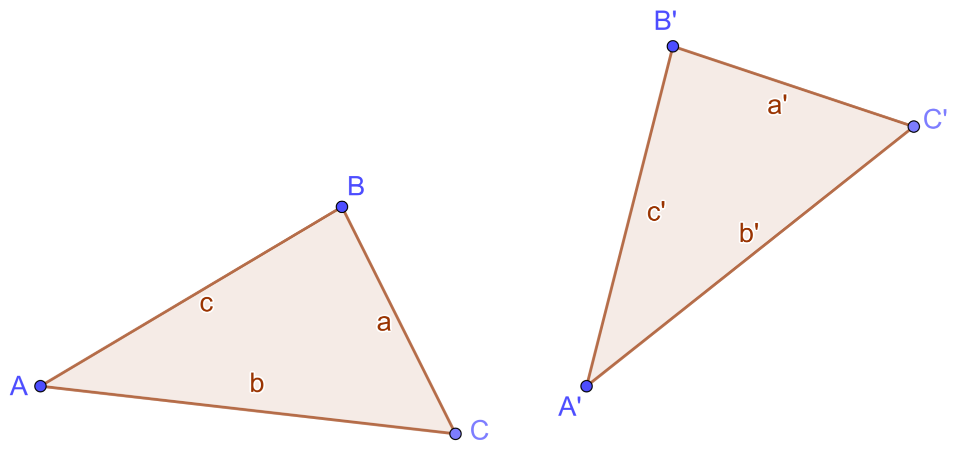
1.0 Prérequis

A retenir

Rappels

• **Définition** : Deux triangles sont isométriques lorsque les côtés de l'un ont des longueurs égales aux côtés de l'autre.

Exemple



Les deux triangles sont isométriques car $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$

• **Propriété** : lorsque deux triangles sont isométriques, leurs angles respectifs ont mêmes amplitudes. $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$

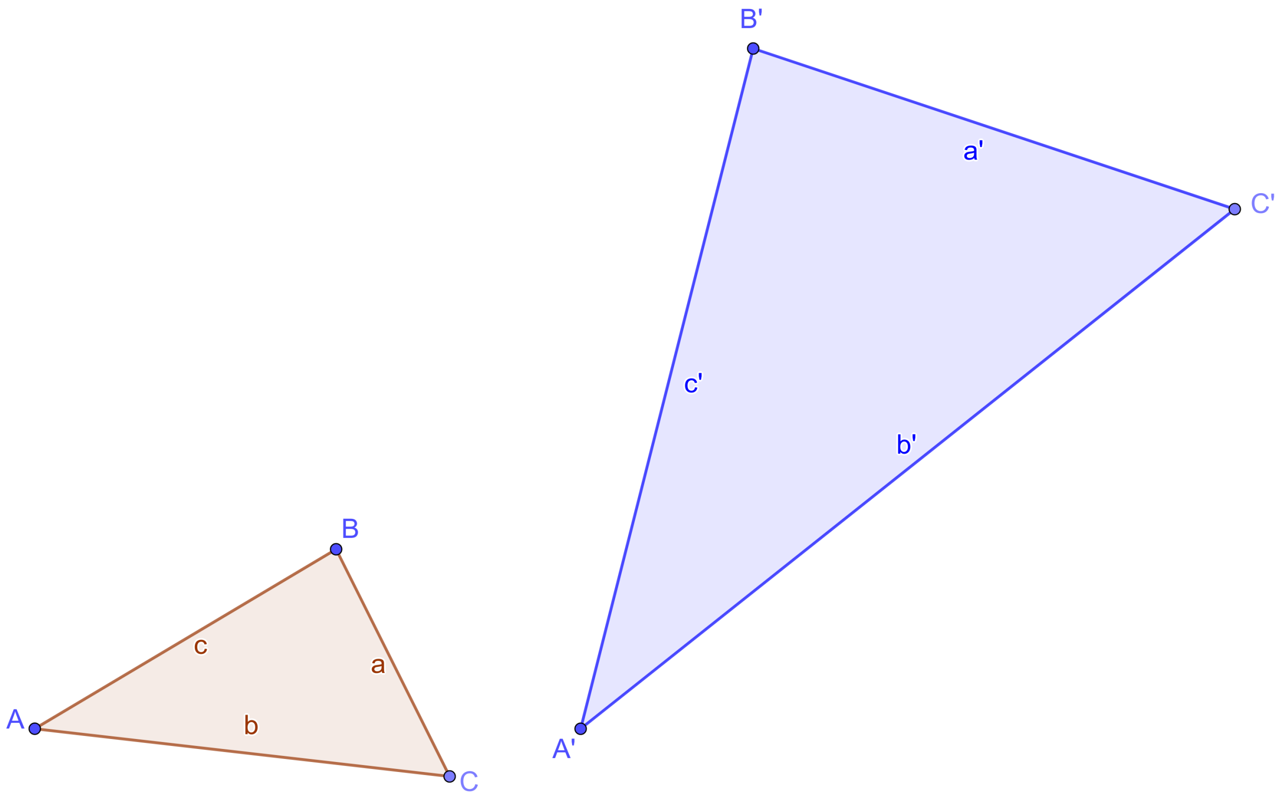
Critères des triangles isométriques

• Deux triangles sont isométriques ssi ils ont un angle de même amplitude compris entre deux côtés de mêmes longueurs. (côté - angle - côté)

• Deux triangles sont isométriques ssi ils ont un côté de même longueur compris entre deux angles de mêmes amplitudes. (angle - côté - angle)

• **Définition** : Deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés respectifs sont proportionnels.

Exemple



Les deux triangles sont semblables car $\begin{cases} a' = 2a \\ b' = 2b \\ c' = 2c \end{cases}$

• **Propriété** : lorsque deux triangles sont semblables, leurs angles respectifs ont mêmes amplitudes. $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$

Critères des triangles semblables

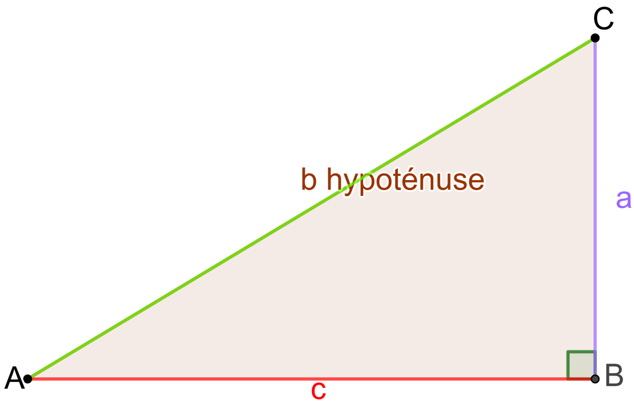
• Deux triangles sont semblables ssi ils ont un angle de même amplitude compris entre deux côtés de longueurs proportionnelles. (côté - angle - côté)

• Deux triangles sont semblables ssi ils ont un côté de longueur

proportionnelle compris entre deux angles de mêmes amplitudes.
(angle - côté - angle)

Triangles rectangles

Soit le triangle ABC,
rectangle en B.



sin d'un angle aigu dans un triangle rectangle est égal au rapport du côté opposé à cet angle à l'hypoténuse	SOH	sin $\widehat{A} = \frac{a}{b}$ sin $\widehat{C} = \frac{c}{b}$
cos d'un angle aigu dans un triangle rectangle est égal au rapport du côté adjacent à cet angle à l'hypoténuse	CAH	cos $\widehat{A} = \frac{c}{b}$ cos $\widehat{C} = \frac{a}{b}$
tan d'un angle aigu dans un triangle rectangle est égal au rapport du côté opposé à cet angle au côté adjacent	TOA	tan $\widehat{A} = \frac{a}{c}$ tan $\widehat{C} = \frac{c}{a}$
Le carré de l'hypoténuse...	Pythagore	$b^2 = a^2 + c^2$
Somme des angles intérieurs	$180°$	$\widehat{A} + \widehat{C} = 90°$

NB : Il faudrait dire « longueur du côté opposé »... « longueur de l'hypoténuse ».

Valeurs remarquables

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Réponses aux exercices

Il y a deux types de formules.

- Celles qui contiennent l'hypoténuse : SOH, CAH et Pythagore.
- Celles qui ne contiennent pas l'hypoténuse : TOA et 90°.

Regarde bien les données et choisis une formule qui ne contient qu'une inconnue !

1. Isole

   (a) $R = \dfrac{U}{I}$

   (b) $v = \dfrac{d}{t}$

   (c) $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$ si $r \geq 0$

   (d) $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$ si $r \geq 0$

   (e) $y = \dfrac{x}{t}$

   (f) $x = \dfrac{4y+5}{3}$

   (g) $y = \dfrac{5-x}{2}$

   (h) $y = \dfrac{5-3x}{4}$

   (i) $d = \dfrac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}$

2. Première série : un angle aigu et un côté sont donnés. C2

   Soit le triangle ABC rectangle en B. Complète le tableau.

a	b	c	$\widehat{A}$	$\widehat{C}$
17 cm	21,01 cm	12,35 cm	54°	36°
9,51 cm	13 cm	8,87 cm	47°	43°
17 cm	58,15 cm	55,60 cm	17°	73°

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/trigonometrie

3. Deuxième série : deux côtés sont donnés. C2

   Soit le triangle ABC rectangle en B. Complète le tableau.

a	b	c	$\widehat{A}$	$\widehat{C}$
3 cm	5 cm	4 cm	36,87°	53,13°
17 cm	20 cm	10,54 cm	58,21°	31,79°
8,31 cm	13 cm	10 cm	39,72°	50,28°

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/trigonometrie

4. Un bûcheron mesure la hauteur d'un arbre C3
à l'aide d'un triangle rectangle dont un angle aigu mesure 30°.
Il place cet angle à son œil, le côté adjacent horizontal, et doit reculer à 32 mètres du pied de l'arbre pour viser la cime de l'arbre avec l'hypoténuse.

   (a) Quelle est la hauteur de l'arbre sachant que l'œil du bûcheron est à 1,5 mètre de haut ? 19,98 m

   (b) Il n'est pas possible de reculer de 32 mètres. Aussi notre bûcheron place l'autre angle aigu à son œil, de la même façon.
   De combien de mètres doit-il reculer pour viser la cime de cet arbre ?

   http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/trigonometrie http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/trigonometrie 10,67 m

5. D'une fenêtre, l'œil d'un observateur situé à 9 mètres au-dessus du sol vise le pied et le sommet d'une grue de chantier. C3
   Le pied de la grue est situé à 13° en-dessous de l'horizontale, alors que son sommet se situe 58° au-dessus.
   Quelle est la hauteur de la grue ?

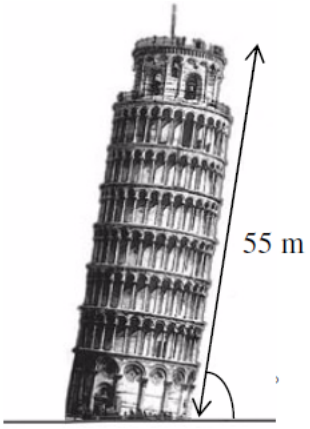
   http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/trigonometrie 71,39 m

Exercices supplémentaires

1. Sachant que la tour de Pise mesure 55 m et fait avec le sol un angle de 85°, C3

   (a) calcule à quelle hauteur se situe le sommet de la tour. 54,79 m

   (b) Un touriste distrait laisse tomber son appareil photo du haut de la tour. A quelle distance du pied de la tour se situera le point d'impact ? 4,79 m

2. Tu gravis une côte sur une route après avoir remarqué un panneau routier indiquant une montée à 5%. C2
   Quel angle fait la route avec la direction horizontale ? $\alpha = 2,8624°$

1.1 Angles dans le cercle trigonométrique

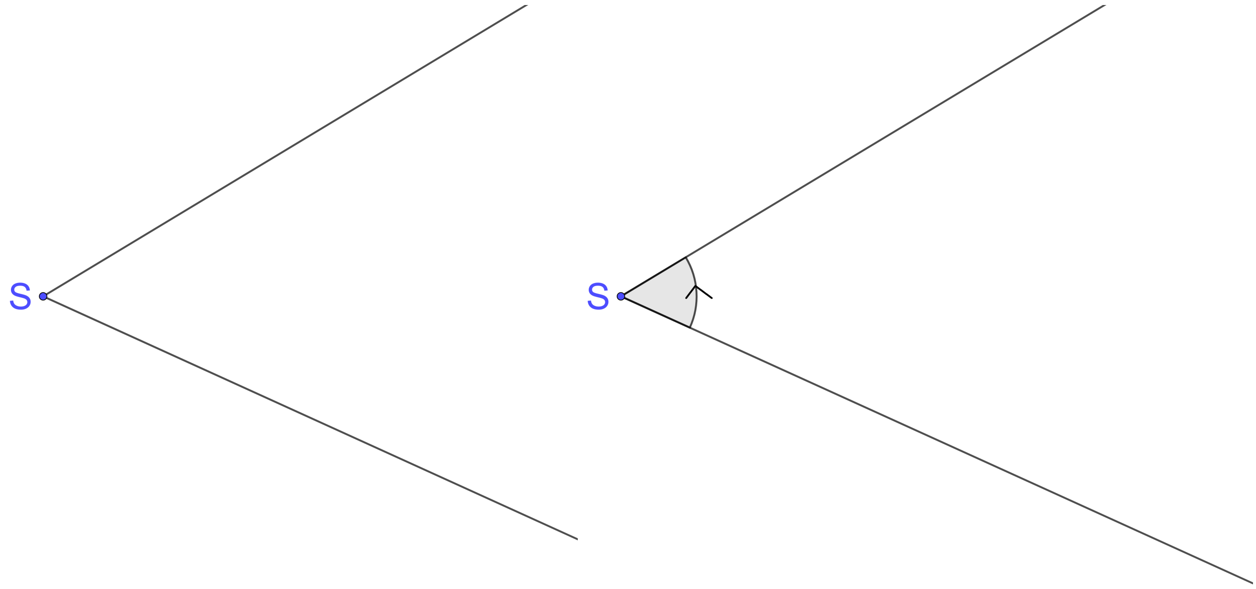
A retenir

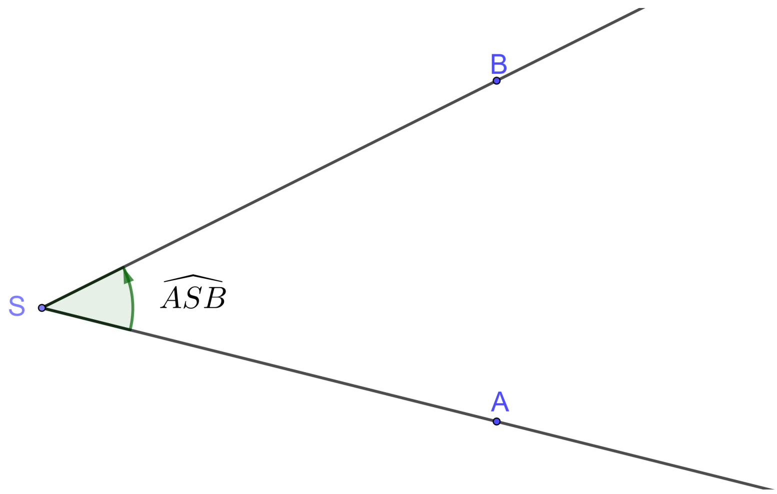
Définitions

Un angle est formé de deux demi-droites de même origine.
Cette origine est appelée sommet.

Un angle orienté est un angle dont les côtés ont un ordre. Le premier côté est appelé origine de l'angle orienté et le second côté est appelé extrémité.

Le sommet est noté S sur le dessin et la flèche indique l'ordre.





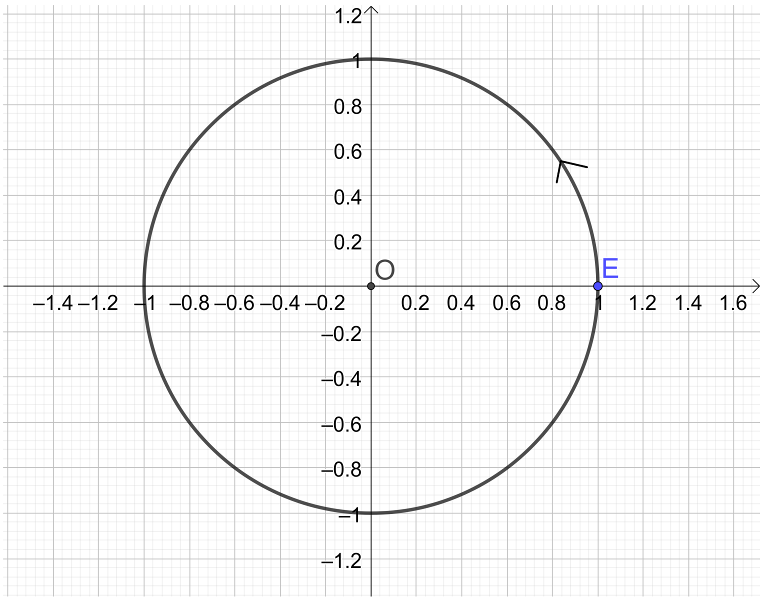
Les angles orientés $\widehat{ASB}$ et $\widehat{BSA}$ diffèrent donc essentiellement par leur sens.

• Une mesure de l'angle orienté $\widehat{ASB}$, notée $\left|\widehat{ASB}\right|$, est l'amplitude de l'angle de la rotation de centre O qui applique le côté origine $[OA$ sur le côté extrémité $[OB$.

Définition du cercle trigonométrique

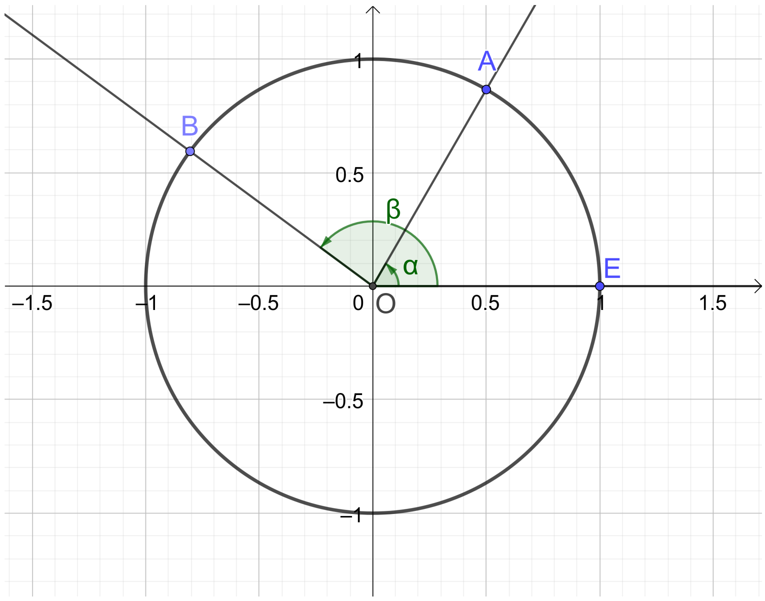
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le cercle trigonométrique est le cercle

- centré à l'origine du repère
- dont le rayon est 1 (1 unité)
- dont l'origine est le point $E\,(1;0)$
- orienté positivement.



Propriétés

1. Tout angle orienté α est représenté par un point A sur le cercle trigonométrique.
   Deux angles orientés sont représentés par deux points différents et tout point du cercle trigonométrique correspond à un angle orienté.



2. Dans le cercle trigonométrique, tout angle orienté possède plusieurs mesures.
Elles diffèrent l'une de l'autre de 360°, c'est-à-dire d'un tour complet.
Un angle orienté a donc une infinité de mesures équivalentes :
elles diffèrent entre elles d'un multiple entier de $360°$.
Si nous voulions toutes les rassembler en une seule formule, nous dirions que l'angle $\widehat{AOB}$ a pour mesures en degrés $\left|\widehat{AOB}\right| = 60$°+$k.360$° ($k \in \mathbb{Z}$, correspondant à « un certain nombre entier de tours »).

Réponses aux exercices

Incursion

Les angles mesurent 55,5° (55° et 56° sont de bonnes réponses) et 155,5° (155° et 156° sont de bonnes réponses).

Mesures d'un angle orienté dans le cercle trigonométrique

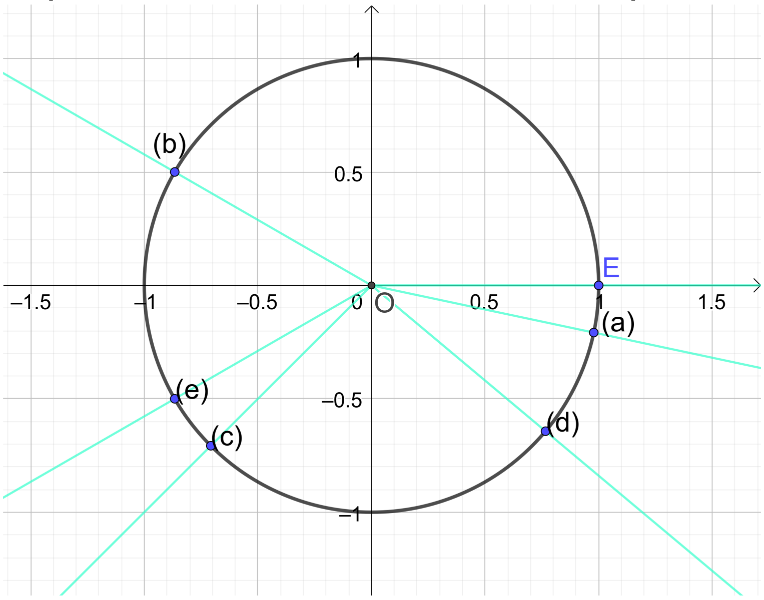
Autres mesures possibles :

1. $\left|\widehat{AOB}\right| = 420$° car 420°=60° $+ \underbrace{360°}_{1\,tour}$
2. $\left|\widehat{AOB}\right| = -660$° car -660°=60° $- \underbrace{720°}_{2\,tours}$

3. $\left|\widehat{AOB}\right| = 1140°$ car $1140°=60° + \underbrace{1080°}_{3\,tours}$

Exercices

1. Représente et détermine 2 mesures positives et 2 négatives.



(a) $-12°$ $-372°$ $348°$ $708°$

(b) $150°$ $-210°$ $-570°$ $510°$

(c) $-135°$ $-495°$ $225°$ $585°$

(d) $320°$ $-40°$ $-400°$ $680°$

(e) $210°$ $-150°$ $-510°$ $570°$

2. Donne la mesure appartenant à l'intervalle $[0°; 360°[$.

(a) $150°$

(b) $210°$

(c) $0°$

(d) $260°$

(e) $170°$

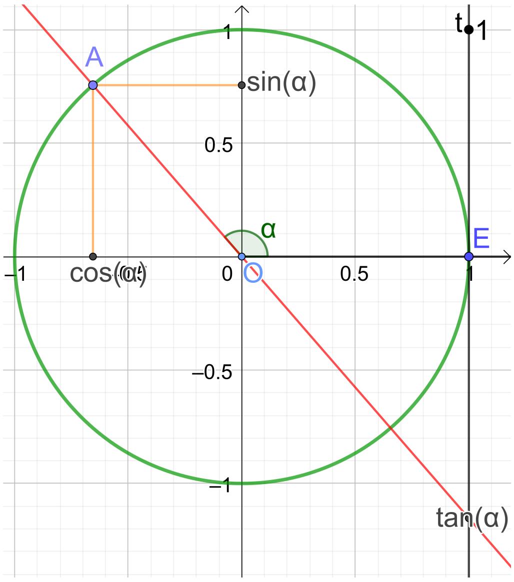
1.2 sin, cos, tan d'un angle quelconque

A retenir

Ajoutons à côté du cercle trigonométrique l'axe t, parallèle à l'axe vertical, passant par $(1, 0)$ et avec les mêmes graduations.

Si A est l'unique point du cercle trigonométrique déterminé par l'angle orienté d'amplitude α, alors

- le sinus de α ($\sin\alpha$) est l'ordonnée du point A
- le cosinus de α ($\cos\alpha$) est l'abscisse du point A
- la tangente de α ($\tan\alpha$) est la graduation sur l'axe des tangentes du point d'intersection avec la droite OA.



Valeurs remarquables

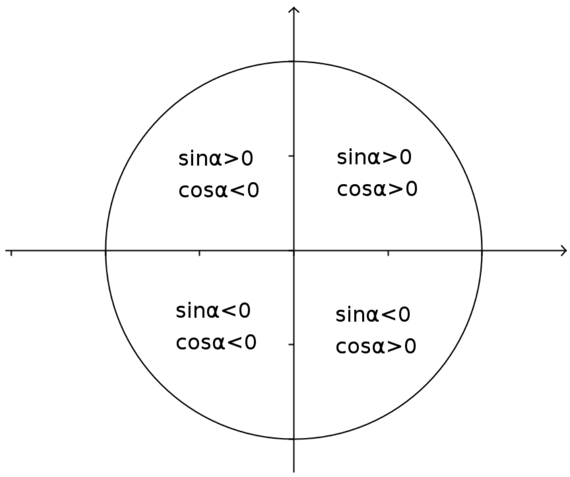
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	?	0	?

Moyen mnémotechnique

Il est aisé de retenir les sinus et cosinus pour les angles particuliers 0°, 30°, 45°, 60° et 90° si on écrit le numérateur sous forme de radical, dans l'ordre :

- pour le sinus : $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{4}}{2}$, ce qui donne 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1
- pour le cosinus : 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, c'est-à-dire l'inverse !

Signe des nombres trigonométriques



Conditions d'existence et valeurs prises par les nombres trigonométriques

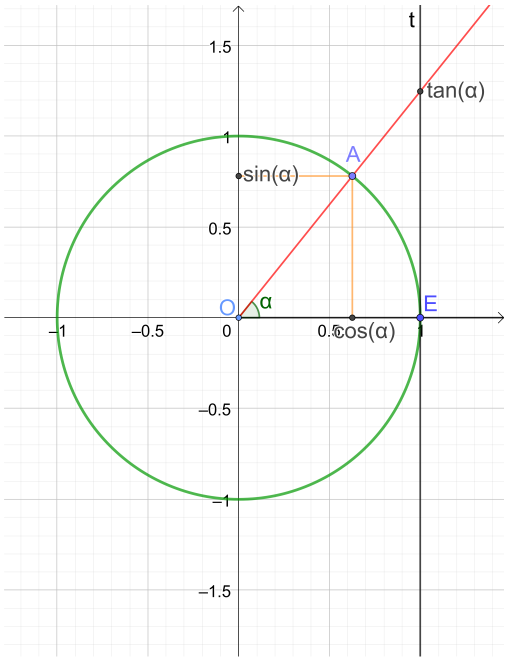
1. Tout angle a un sinus et un cosinus.

2. Quel que soit l'angle orienté dont une mesure est α,
   $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$
   $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

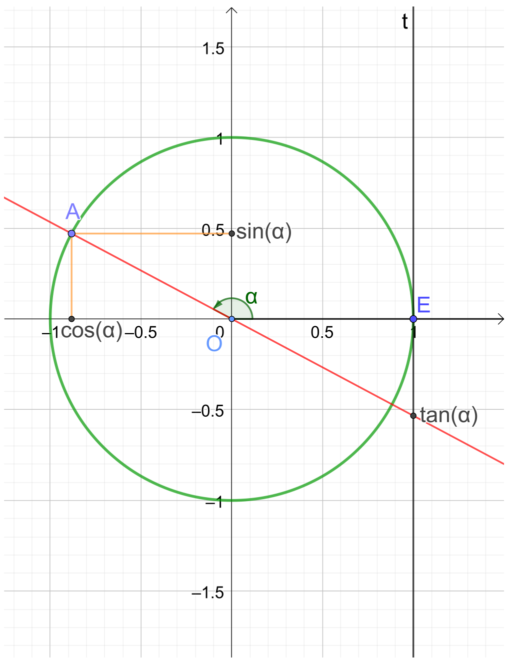
3. Les angles droits (positif et négatif) n'ont pas de tangente.
   La tangente d'un angle orienté (dont une mesure est α) existe si et seulement si
   $\alpha \neq 90° + k.360°$ et $\alpha \neq -90° + k.360°$
   ce qui peut se résumer par
   Conditions d'existence : $\alpha \neq 90° + k.180° \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Réponses à l'exercice

1. Représente $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$ puis donnes-en une valeur approximative.

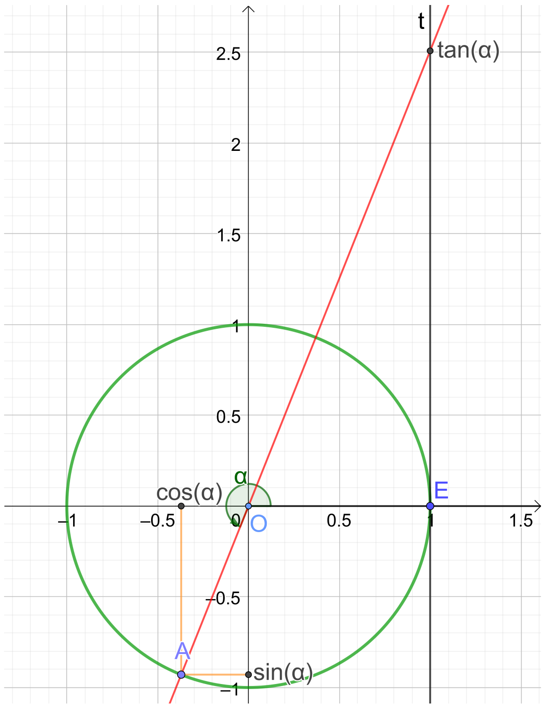
(a) 

$\sin\alpha \cong 0,78$
$\cos\alpha \cong 0,63$
$\tan\alpha \cong 1,25$

(b) 

$\sin\alpha \cong 0,47$
$\cos\alpha \cong -0,88$
$\tan\alpha \cong -0,53$

(c)

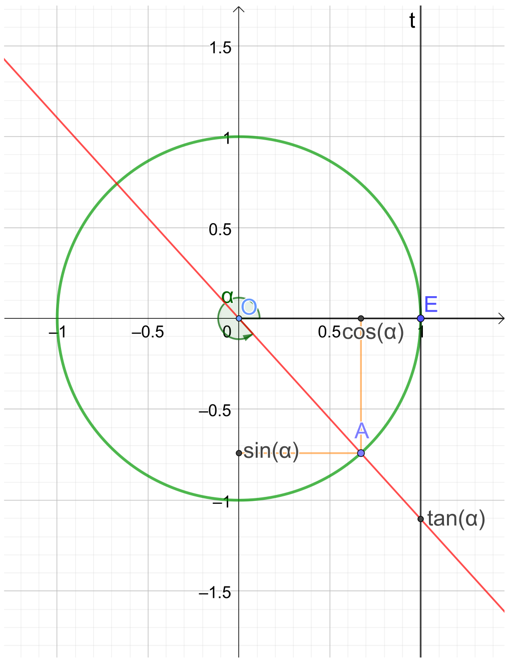


$\sin\alpha \cong -0,93$

$\cos\alpha \cong -0,37$

$\tan\alpha \cong 2,51$

(d)



$\sin\alpha \cong -0,74$

$\cos\alpha \cong 0,67$

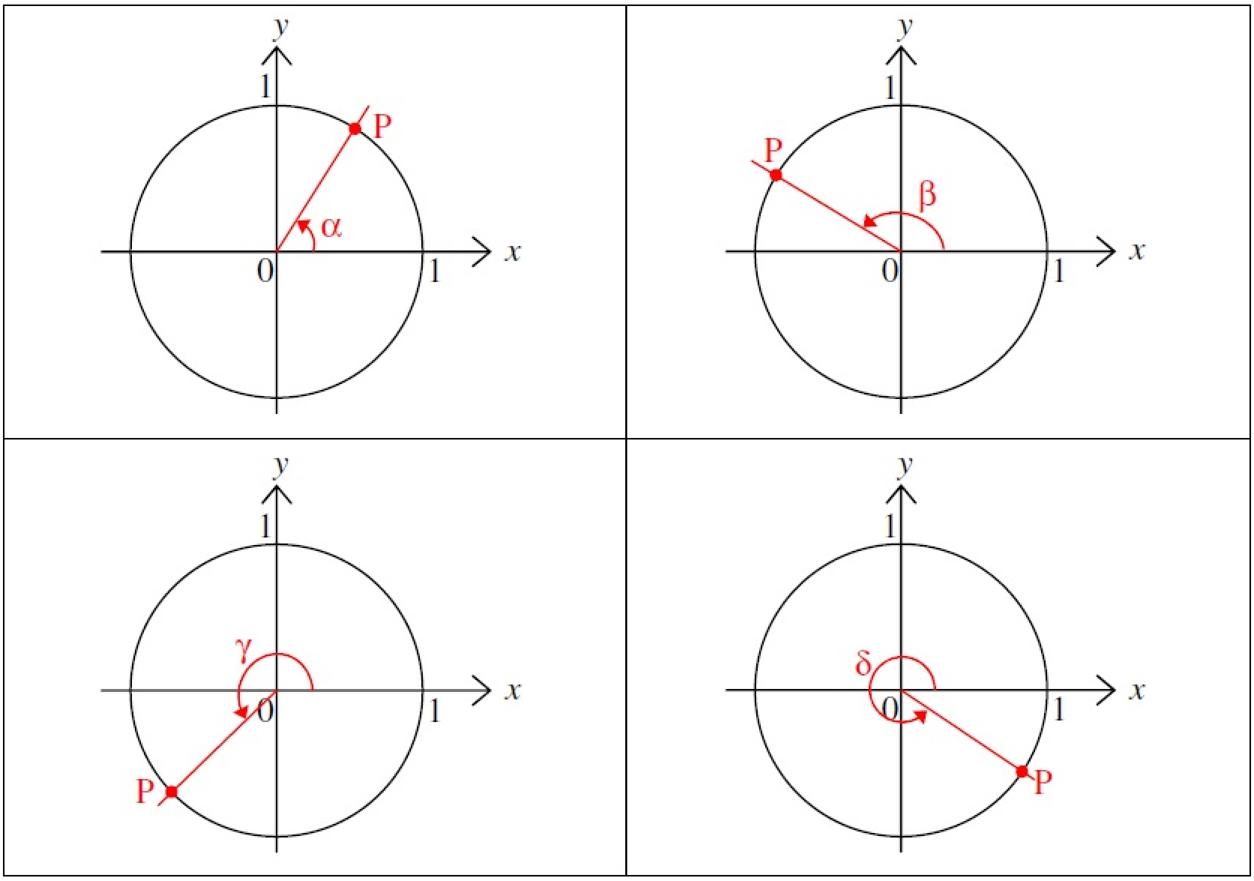
$\tan\alpha \cong -1,1$

1.3 Formule fondamentale de la trigonométrie et formule de tan

Quel que soit l'angle orienté dont une mesure est α,

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Démonstration



Choisis un angle ci-dessus.

Trace un triangle rectangle d'hypoténuse $[OP]$ et dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées.

Le côté horizontal de l'angle droit mesure $|\cos\alpha|$.

Le côté vertical de l'angle droit mesure $|\sin\alpha|$.

Par le théorème de Pythagore, $1^2 = |\sin\alpha|^2 + |\cos\alpha|^2$ et donc

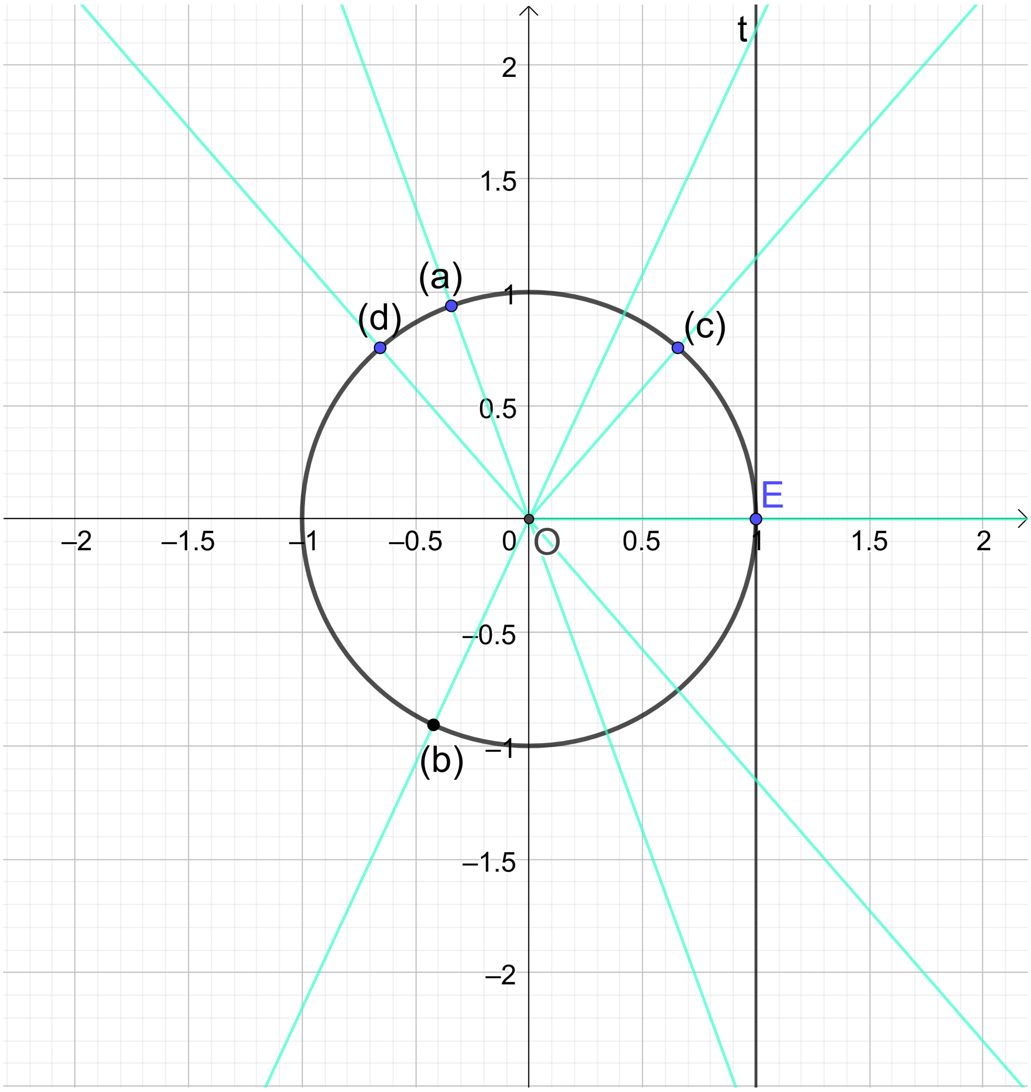
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Formule trigonométrique de $tan\alpha$

$\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ où α est une mesure d'un angle quelconque non droit.

Une démonstration se trouve dans la première partie.

Réponses à l'exercice



α	sin α	cos α	tan α	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$	tan α	sin α	cos α	tan α
110°	0,9	-0,3	-3	0,9	-3	0,9397	-0,3420	-2,7475
246,12°	-0,9	-0,4	2,3	0,97	2,25	-0,9144	-0,4048	2,2588
49°	0,8	0,7	1,2	1,13	1,14	0,7547	0,6561	1,1504
131°	0,8	-0,7	-1,2	1,13	-1,14	0,7547	-0,6561	-1,1504

Remarques

1. Avec des valeurs approximatives de sin et cos, on a obtenu une erreur sur $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ allant jusqu'à 13%.

2. Les points (c) et (d) sont symétriques.

Exercices supplémentaires

1. Démontre que $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

   Suggestion : utilise $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ et $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2. Sans utiliser la calculatrice , détermine la valeur de chaque nombre trigonométrique de α si

   (a) α est dans le même quadrant que $-735°$ et $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

   Réponses : α est dans Q_4. $\sin^2\alpha + \dfrac{4}{13} = 1$ $\quad \sin^2\alpha = \dfrac{9}{13}$

   $\sin\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{13}} = -\dfrac{3.\sqrt{13}}{13}$ $\quad \tan\alpha = -\dfrac{3}{2}$

   (b) $\alpha \in Q_2$ et $\tan\alpha = -2$

   Réponses : $1 + 4 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$

   $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

   (c) $\sin\alpha \geq 0$ et $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$

   Réponses : $\sin^2\alpha + \dfrac{1}{9} = 1$ $\quad \sin^2\alpha = \dfrac{8}{9}$ $\quad \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

   $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$

   (d) $\tan\alpha \geq 0$ et $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$

   Réponses : $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ et $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$

   (e) $\cos\alpha \leq 0$ et $\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$

   Réponses : $\cos\alpha = -\dfrac{24}{25}$ et $\sin\alpha = -\dfrac{7}{25}$

   (f) $\alpha \in [-90°; 90°]$ et $\tan\alpha = \dfrac{1}{4}$

   Réponses : $1 + \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{16}{17}$

   $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{17}} = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}$ $\quad \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$

   (g) $\tan\alpha \leq 0$ et $\sin\alpha = -\dfrac{5}{6}$

   Réponses : $\dfrac{25}{36} + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \cos^2\alpha = \dfrac{11}{36}$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$

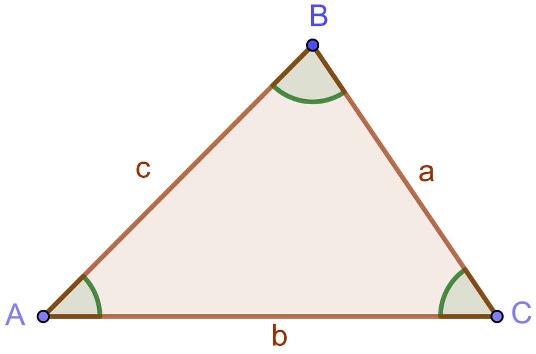
   $\tan\alpha = -\dfrac{5}{\sqrt{11}} = -\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$

1

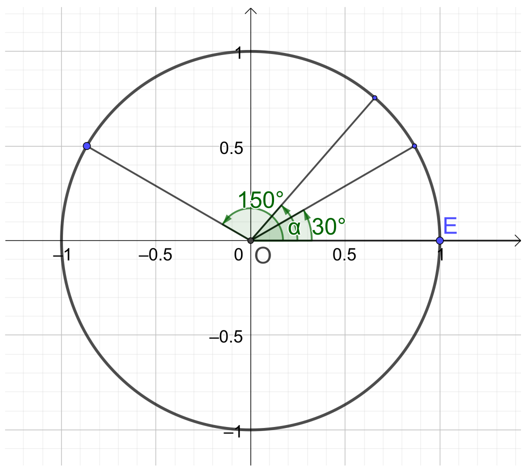
1.4 Aire d'un triangle quelconque

A retenir

Dans un triangle quelconque ABC, nous désignerons par a, b , c , $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures des côtés ainsi que les amplitudes des angles comme dans le dessin.



Angles supplémentaires



L'angle de 150° est lié avec l'angle de 30°. Ils sont appelés angles supplémentaires car leur somme vaut 180°.

Comme leurs points du cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, deux angles supplémentaires ont le même sinus.

$\sin 150° = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$.

Pour l'angle α, trace son supplémentaire, indique sa mesure et repère son sinus.

$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$

Comme leurs points du cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, deux angles supplémentaires ont des cosinus opposés.

$\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$

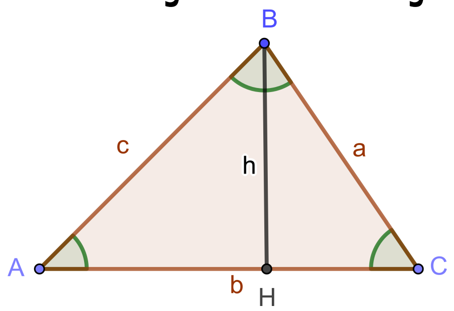
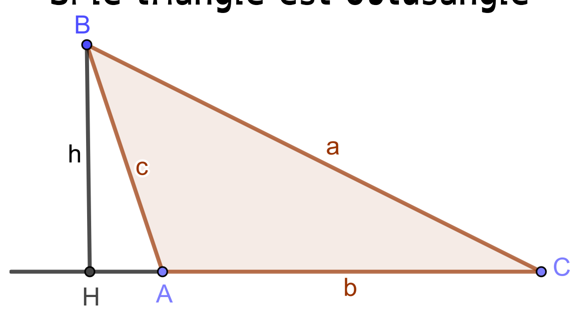
Formules de l'aire

Le but des formules suivantes est de calculer l'aire du triangle ABC sans utiliser de hauteur mais uniquement les côtés et les angles du triangle.

L'aire de tout triangle égale la moitié du produit des longueurs de deux côtés par le sinus de l'angle formé par ces deux côtés.

$$S = \frac{a.b.\sin\widehat{C}}{2} = \frac{a.c.\sin\widehat{B}}{2} = \frac{b.c.\sin\widehat{A}}{2}$$

Démonstration

Si le triangle est acutangle	Si le triangle est obtusangle
 	
$S = \frac{Base.Hauteur}{2} = \frac{b.h}{2}$ (1)	$S = \frac{Base.Hauteur}{2} = \frac{b.h}{2}$ (1)
Or, dans le triangle ABH	Or, dans le triangle ABH
$\sin\widehat{A} = \frac{h}{c}$ donc $h = c.\sin\widehat{A}$	$\sin\widehat{BAH} = \frac{h}{c}$ donc $h = c.\sin\widehat{BAH}$ $h = c.\sin\widehat{A}$ (car $\widehat{A}$ et $\widehat{BAH}$ sont supplémentaires)
En reportant dans (1), on trouve : $S = \frac{b.c.\sin\widehat{A}}{2}$	En reportant dans (1), on trouve : $S = \frac{b.c.\sin\widehat{A}}{2}$

Les deux autres égalités se démontrent de manière analogue en choisissant un autre côté comme base.

Réponses aux exercices

1. 1,5
2. 7,5296
3. 7,5929
4. 1,5451

1.5 Formules des triangles quelconques

Lois des sinus

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$$

Démonstration

Partons de la formule de l'aire d'un triangle,
ou plutôt des formules de l'aire d'un triangle :

$$S = \frac{a.b.\sin \widehat{C}}{2} = \frac{a.c.\sin \widehat{B}}{2} = \frac{b.c.\sin \widehat{A}}{2}$$

dans lesquelles on oublie qu'il s'agit de l'aire :

$$\frac{a.b.\sin \widehat{C}}{2} = \frac{a.c.\sin \widehat{B}}{2} = \frac{b.c.\sin \widehat{A}}{2}$$

Multiplions par 2 :

$$a.b.\sin \widehat{C} = a.c.\sin \widehat{B} = b.c.\sin \widehat{A}$$

Puis divisons les 3 membres par $a.b.c$:

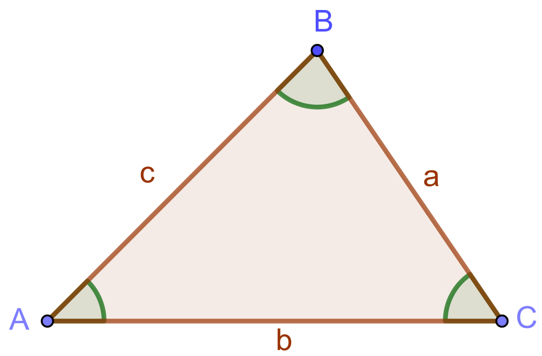
$$S = \frac{a.b.\sin \widehat{C}}{a.b.c} = \frac{a.c.\sin \widehat{B}}{a.b.c} = \frac{b.c.\sin \widehat{A}}{a.b.c}$$

Il reste à simplifier chaque fraction :

$$S = \frac{\cancel{a}.\cancel{b}.\sin \widehat{C}}{\cancel{a}.\cancel{b}.c} = \frac{\cancel{a}.\cancel{c}.\sin \widehat{B}}{\cancel{a}.b.\cancel{c}} = \frac{\cancel{b}.\cancel{c}.\sin \widehat{A}}{a.\cancel{b}.\cancel{c}}$$

Pour obtenir :

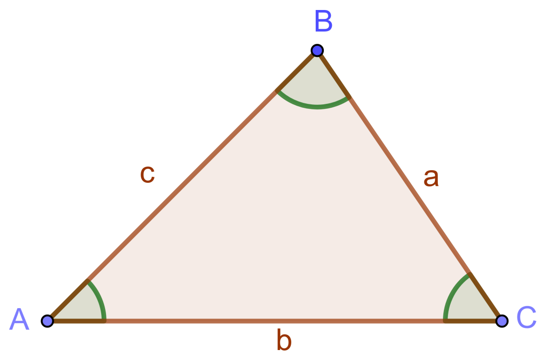
$$\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}$$
qui est la loi des sinus.



Lois du cosinus (théorème de Pythagore généralisé)

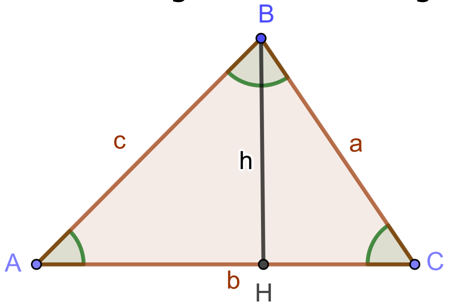
Le carré de la longueur d'un côté d'un triangle égale la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés diminuée du double produit des longueurs de ces autres côtés par le cosinus de l'angle formé par ces côtés.

$$a^2=b^2+c^2-2.b.c.\cos\widehat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2.a.c.\cos\widehat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2.a.b.\cos\widehat{C}$$



Démonstration

<table>
<tr>
<td>
Si le triangle est acutangle

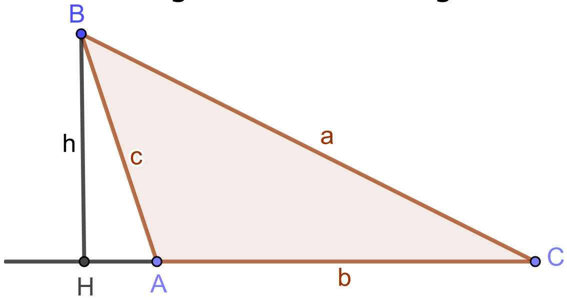


Dans le triangle rectangle BHC,
on a :

$a^2 = |CH|^2 + h^2$
$a^2 = (b - |AH|)^2 + h^2$
$a^2 = b^2 - 2b.\,|AH| + |AH|^2 + h^2$ (1)
Dans le triangle rectangle BHA,
on a :
$|AH|^2 + h^2 = c^2$ (2)
$\cos \widehat{A} = \dfrac{|AH|}{c}$ d'où
$|AH| = c.\cos \widehat{A}$ (3)

En portant (2) et (3) dans (1),
on trouve :

$a^2 = b^2 - 2b.c.\cos \widehat{A} + c^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos \widehat{A}$
</td>
<td>
Si le triangle est obtusangle



Dans le triangle rectangle BHC,
on a :

$a^2 = |CH|^2 + h^2$
$a^2 = (b + |AH|)^2 + h^2$
$a^2 = b^2 + 2.b.\,|AH| + |AH|^2 + h^2$ (1)
Dans le triangle rectangle BHA,
on a :
$|AH|^2 + h^2 = c^2$ (2)
$\cos \widehat{BAH} = \dfrac{|AH|}{c}$ d'où
$|AH| = c.\cos \widehat{BAH}$
$|AH| = -c.\cos \widehat{A}$ (3)
car $\widehat{BAH}$ et $\hat{A}$ sont supplémentaires.
En portant (2) et (3) dans (1),
on trouve :

$a^2 = b^2 + 2.b.\left(-c.\cos \widehat{A}\right) + c^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \widehat{A}$
</td>
</tr>
</table>

Les deux autres égalités se démontrent de manière analogue en choisissant un autre côté comme base.

Rappel

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

Réponses aux exercices

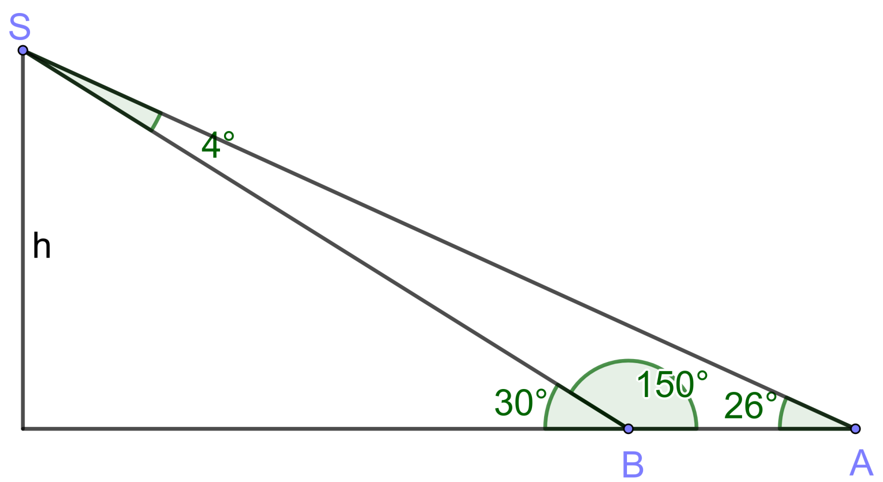
Résous les triangles suivants et détermine leur aire : C2 (C3 si *)

	a	b	c	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	Aire
1.	10	5,18	7,32	105°	30°	45°	18,31
2.	17,32	10	20	60°	30°	90°	86,6
3.	10	20	15	28,955°	104,4775°	46,5675°	72,62
4.	13	2	5	impossible			
5.	25	13	17,21	110,9417°	29,0583°	40°	104,45
6.	95,31	100	44,59	71°	82,75°	26,25°	2108,03
7.*	20	30	12,75 ou 39,21	30°	131,4097° ou 48,5903°	18,5903° ou 101,4097°	95,64 ou 294,07
8.*	25	70	93,82	5,3614°	15,17°	159,4719°	306,83
9.*	5,31	4,19 ou 3,01	3,95	81,3951° ou 98,6049°	51,2549° ou 34,0451°	47,35°	17,95
10.	70	82	41,01	58,5890°	91,411°	30°	1435
11.	42	100	108	22,8837°	67,7984°	89,3179°	2099,85
12.*	98	364	445,56	7,7364°	30°	142,2636°	10917,05

1.6 Applications des triangles quelconques

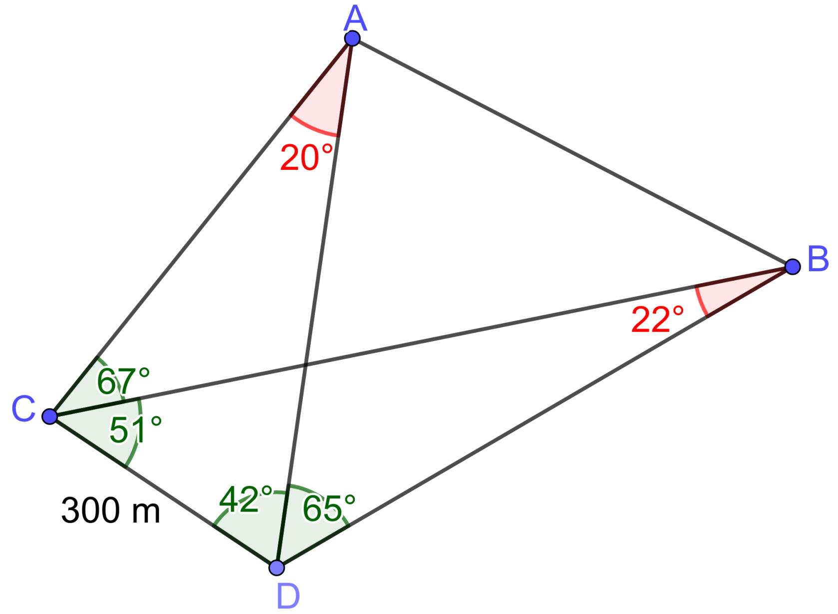
Réponses aux exercices

1. Le Mont Saint-Michel



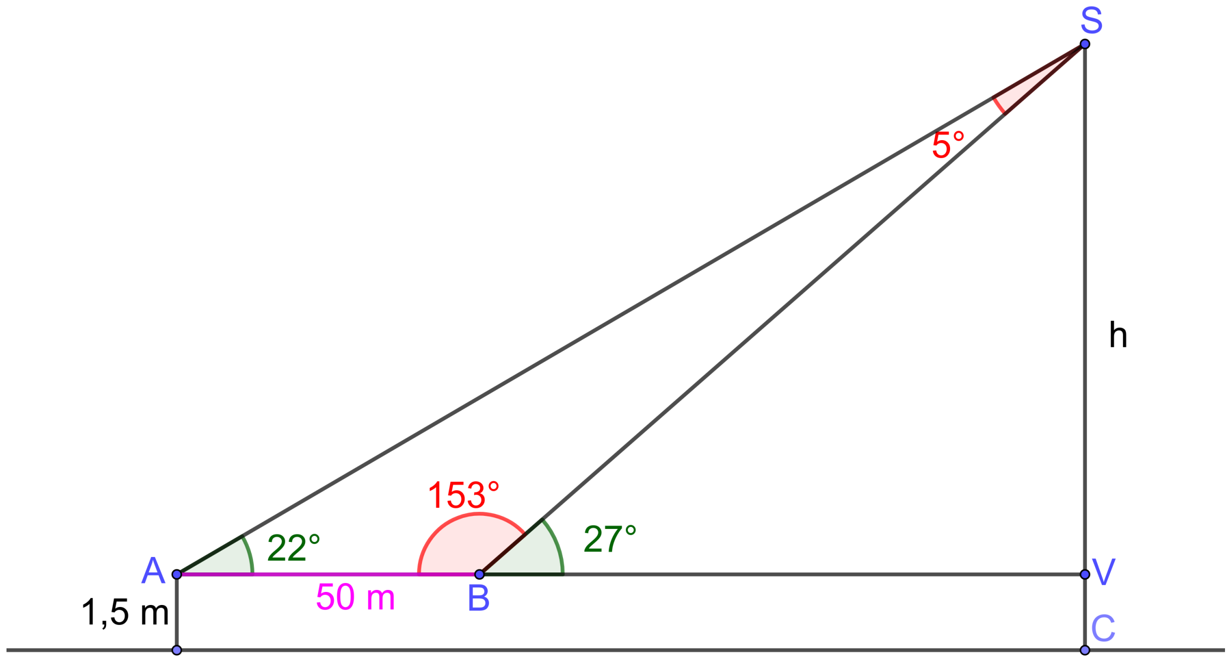
$|BS| = 314,215$
$h = 157,1$ La hauteur du Mont Saint-Michel est de 157,1 mètres.

2. Les alligators



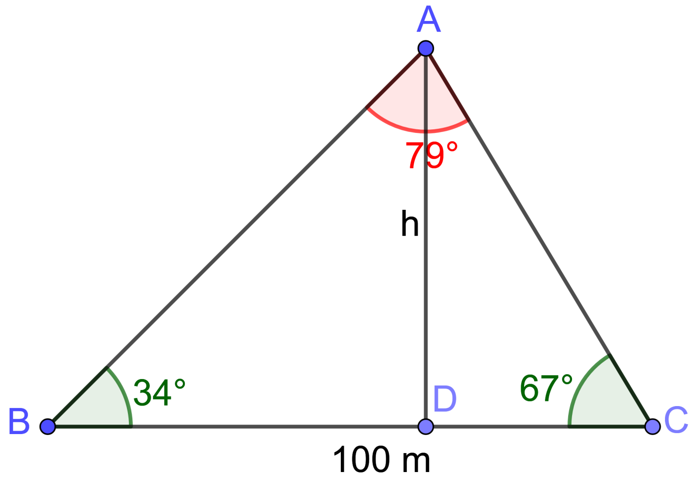
$|CA| = 586,9221$
$|CB| = 765,84724$
$|AB| = 761,4$ Les positions A et B sont séparées de 761,4 mètres.

3. L'Atomium



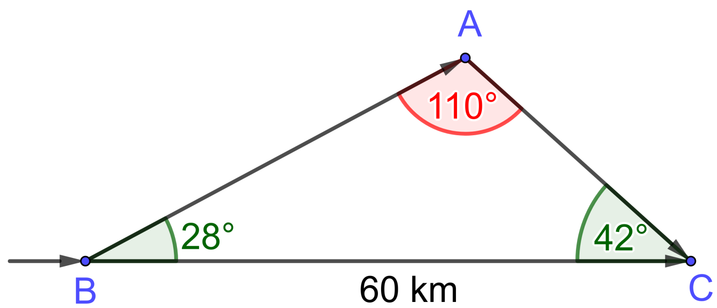
$|BS| = 214,90643$
$|VS| = 97,57$
Réponse : la hauteur de l'Atomium est 99,07 mètres.

4. La rivière



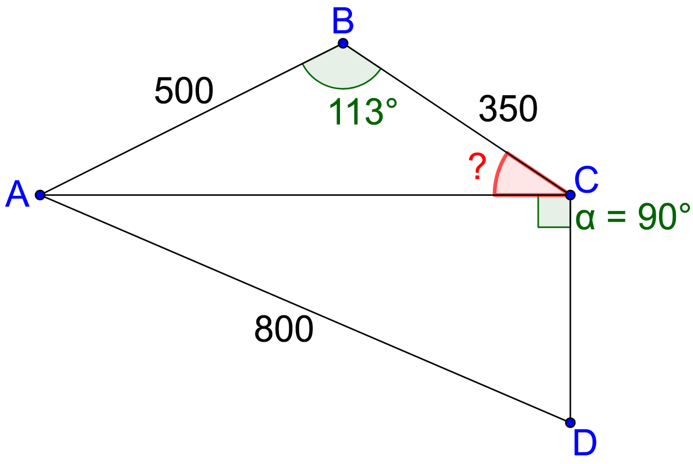
$|AB| = 93,77337$
$h = 52,4$ La largeur de la rivière est 52,4 mètres.

5. L'avion



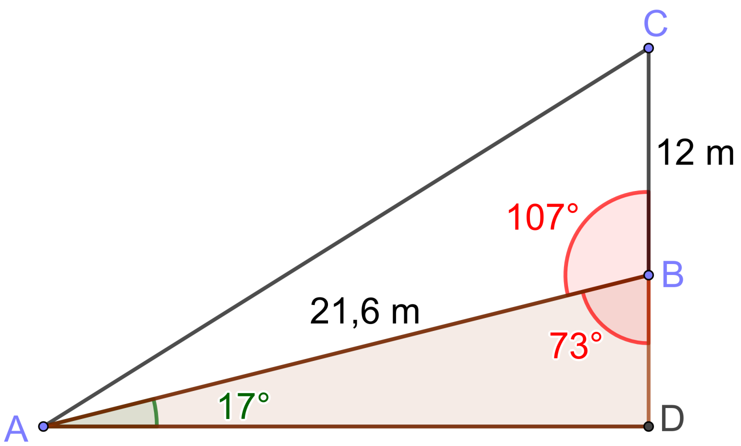
$|AB| = 42,724$
$|AC| = 29,976$
$|AB| + |AC| = 72,7$
Réponse : la distance supplémentaire est de 12,7 kilomètres.

6. Le polygone



$|AC| = 713,621675$
$\widehat{ACB} = 40,16215°$
$\widehat{BAC} = 26,83785°$
$\widehat{ADC} = 63,12909°$
$\widehat{DAC} = 26,87091°$
$|CD| = 361,58554$
Réponses : $\widehat{BAD} = 53,71°$ $\widehat{ADC} = 63,13°$ $\widehat{DCB} = 130,16°$ $|CD| = 361,59\,m$

7. La colline

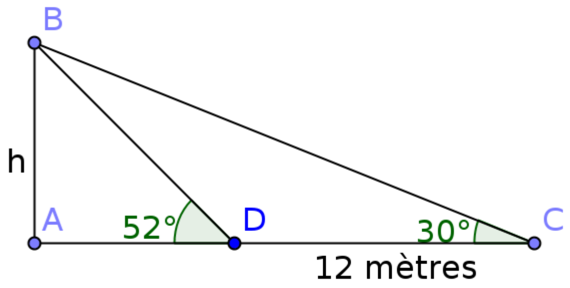


$|AC| = 27,61$
Réponse : la longueur minimale du câble est de 27,7 mètres.

Exercices supplémentaires

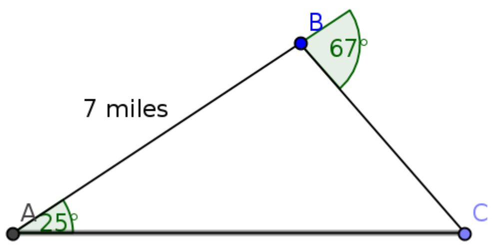
1. Calcule les angles d'un parallélogramme dont une diagonale mesure 20 cm et dont les côtés mesurent respectivement 15 cm et 10 cm.
   $20^2 = 15^2 + 10^2 - 2.150.\cos\alpha$
   α et l'angle opposé mesurent $104,48$°. Les autres angles mesurent $75,52$°.

2. Détermine la hauteur d'un arbre (supposé vertical) dont l'ombre s'allonge de 12 mètres lorsque le soleil passe de 52° à 30° au-dessus de l'horizon.



   $\left|\widehat{D_2}\right| = 128$° $\left|\widehat{B_2}\right| = 22$°
   $\overline{BD} = 16,02\,m$ $\widehat{B_1} = 38$°
   La hauteur de l'arbre est 12,62 m.

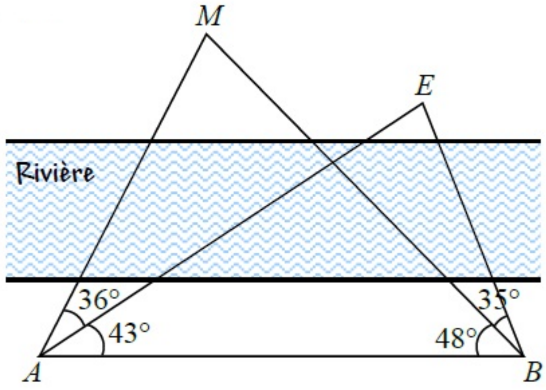
3. Un voilier doit éviter une île qui se trouve sur son trajet. Le skipper change donc de cap et prend une direction à bâbord (gauche) de 25°, il tient le cap pendant 7 miles. Ensuite, il vire à tribord (droite) de 67°. Quelle distance (en miles) doit parcourir le voilier avant de changer à nouveau de cap pour réintégrer son cap initial ?



   $\widehat{B_1} = 113$° $\widehat{C} = 42$°
   Réponse : $\overline{BC} = 4,42$ miles

4. Un observateur situé d'un côté de la rivière souhaite connaître la distance entre le moulin M et l'église E. Ne pouvant traverser la rivière,

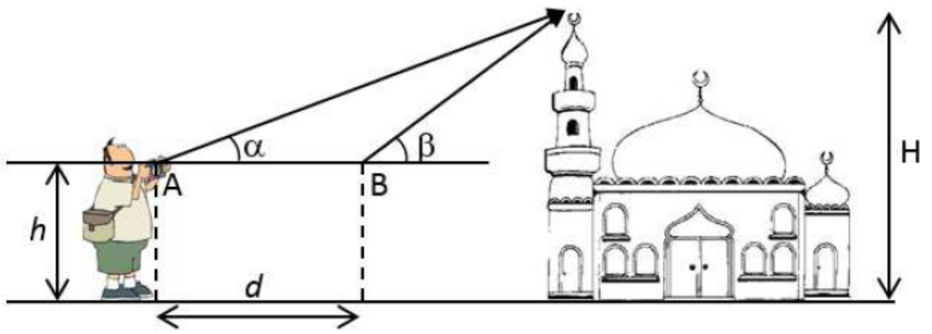
il mesure les angles représentés ci-dessous à partir des points A et B distants de 172 m. Calcule la distance entre M et E.



$\widehat{AMB} = 53°$ $\overline{AM} = 160,05$ mètres
$\widehat{AEB} = 54°$ $\overline{AE} = 211,02$ mètre
La distance entre M et E est 124,49 mètres.

5. Deux voitures quittent en même temps une même ville et suivent chacun une route rectiligne, dont les directions diffèrent de 84°. Si les vitesses des deux voitures sont respectivement de 120 km/h et de 140 km/h (bonjour l'amende !), calcule la distance les séparant au bout de 20 minutes.
$\overline{BC}^2 = 40^2 + \left(\frac{140}{3}\right)^2 - 2.40.\frac{140}{3}.\cos 84°$
La distance qui les sépare est de 58,2 km au bout de 20 minutes.

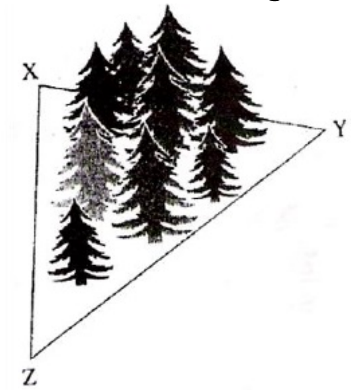
6. Un touriste, pour mesure la hauteur H de la plus haute tour d'un édifice, s'est placé au point B et mesuré l'angle β.
Il s'est ensuite reculé de d mètres jusqu'au point A, d'où il a mesuré l'angle α.
Quelle hauteur H (à 0,1 près) a-t-il calculée si les mesures sont : $h = 1,8m$, $\alpha = 38°$,$\beta = 54°$ et $d = 40m$. Utilise la figure.



Suggestion : Recopier la figure avec les éléments utiles et chercher les angles.
La hauteur est de 74,08 m.

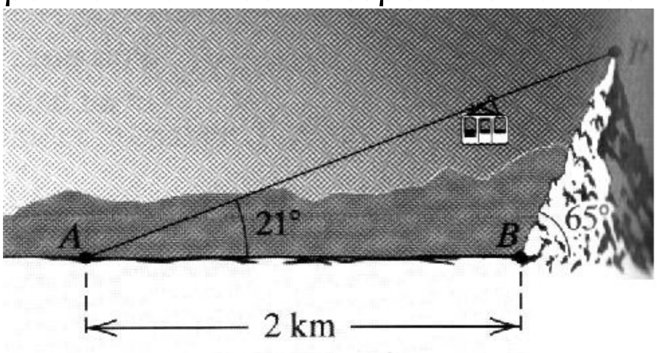
7. Un câble doit être posé en ligne droite à travers une région boisée entre

les points X et Y . Chacun de ces points n'étant pas visible de l'autre, on trouve un point Z d'où on voit les points X et Y . On mesure $|XZ|$ et $|YZ|$. On trouve respectivement 2,450 km et 3,850 km. On mesure l'angle $\widehat{Z}$ et on trouve $53°14'34"$. Quelle est la longueur du câble et la surface du triangle XYZ ?



Longueur du câble : 3,09 km
Surface du triangle : 3,78 km²

8. La figure représente un téléphérique transportant des passagers d'un point A (qui se trouve à 2 km du point B situé au pied de la montagne) à un point P au sommet de la montagne. Les angles d'élévation de P aux points A et B sont respectivement de 21° et de 65°.

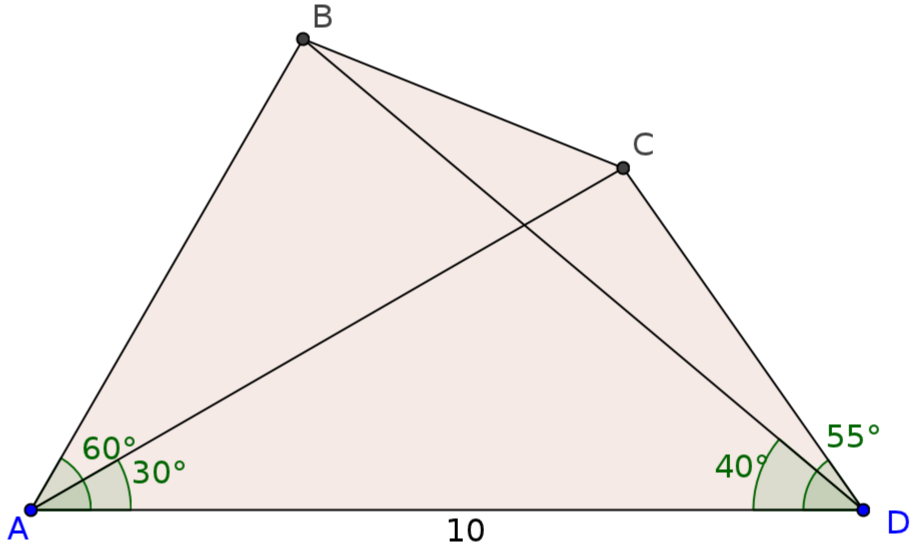


   (a) Calcule la longueur du câble.

   (b) Calcule la hauteur de la montagne.
   Longueur du câble : 2,61 km
   Hauteur de la montagne : 935,11 m

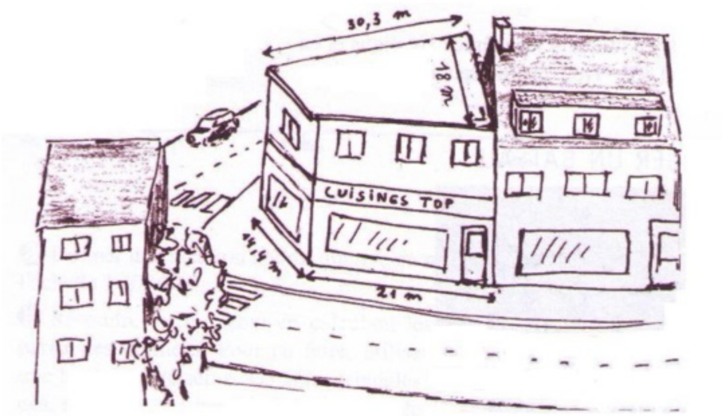
9. Un morceau de terrain présente un tracé triangulaire dont les longueurs des côtés sont de 420 m, 350 m et 180 m. Calcule la mesure du plus petit des angles et déduis-en l'aire du triangle.
Le plus petit angle mesure 24,9789°.
L'aire du triangle est de 31038 m².

10. Calculez la distance $|BC|$, avec 2 décimales exactes.



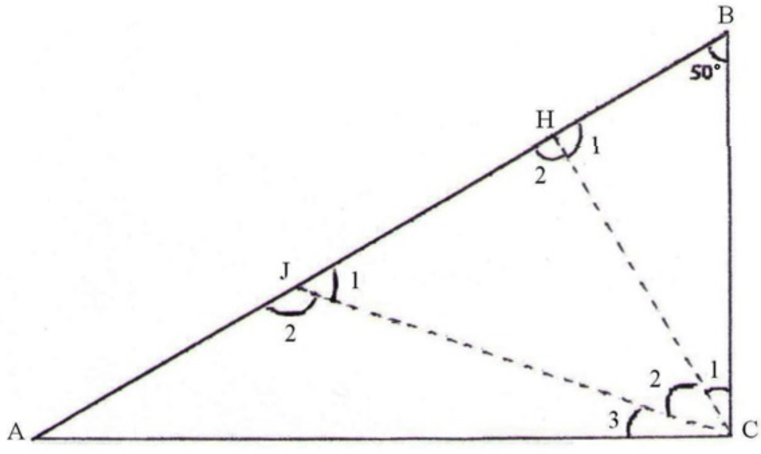
$|AB| = 6,52704$
$|AC| = 8,22281$
La distance $|BC|$ est de 4,15.

11. Un agent immobilier propose un local d'exposition situé à un carrefour, à un fabriquant de cuisines équipées. Il faut que la surface soit d'au moins $380m^2$. Il relève les dimensions du bâtiment. Toit et surface au sol ont la forme d'un quadrilatère dont un angle est droit : les côtés mesurent 30,3m , 14,4 m , 21m et 18 m (cf figure ci-contre). Ce local convient-il au fabricant ?



La surface est de 387,7 m², ce qui convient.

12. Soit le triangle ABC rectangle en C . Sachant que $\overline{AB} = 150cm$, $\overline{CJ} = 85cm$, $\hat{B} = 50°$ et J est le milieu de $[AH]$, détermine la mesure de tous les côtés et l'amplitude de tous les angles de ces triangles.



$\overline{BC} = 96,42cm$ $\quad\overline{AC} = 114,91cm$ $\quad\overline{AJ} = \overline{JH} = 45,96cm$

$\overline{HB} = 58,08cm$ $\quad\overline{HC} = 73,97cm$

$\left|\widehat{J_1}\right| = 60$°20'22" $\quad\left|\widehat{J_2}\right| = 119$°39'38" $\quad\left|\widehat{H_1}\right| = 93$°01'32" $\quad\left|\widehat{H_2}\right| =$ 86°58'28"

$\left|\widehat{C_1}\right| = 36$°58'28" $\quad\left|\widehat{C_2}\right| = 32$°41'10" $\quad\left|\widehat{C_3}\right| = 20$°20'22"

Chapitre 2

Fonctions

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/fonctions

2.0 Prérequis

A retenir

Dans tout ce qui suit, a est un nombre réel différent de 0.

Formules des puissances à exposants entiers

$$a^p.a^m = a^{p+m}$$

$$\left(a^p\right)^n = a^{p.n}$$

Convention

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

Conséquences

$7^3.7^5 = 7^{3+5} = 7^8$

$7^{-3}.7^5 = 7^{-3+5} = 7^2$

$7^{-3}.7^{-5} = 7^{-3+(-5)} = 7^{-8} = \frac{1}{7^8}$

$7^{-5} = \left(7^5\right)^{-1} = \frac{1}{7^5}$

$$\frac{1}{7^{-5}} = \frac{1}{(7^5)^{-1}} = 7^5$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-5} = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right)^5 = 7^5$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9}$$

$$\left(7^{-2}\right)^5 = 7^{-10} = \frac{1}{7^{10}}$$

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$$

Pense que $7^3 = 7.7.7$
et que $7^5 = 7.7.7.7.7$
Ainsi la première et la dernière conséquence deviennent toutes simples.

a²-b²=(a-b).(a+b)

Cette formule est tellement célèbre que du vocabulaire a été inventé :
$a + b$ est le binôme conjugué de $a - b$.
$a - b$ est le binôme conjugué de $a + b$.
Lorsqu'on multiplie un binôme par son conjugué,
l'expression devient une simple soustraction de carrés.

Exemples avec $\sqrt{2} - 5$, $\sqrt{x^2 + 2} - 5$ et $\sqrt{x^2 + x + 1} - x$

$$\left(\sqrt{2} - 5\right) . \left(\sqrt{2} + 5\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 5^2 = -23$$

$$\left(\sqrt{x^2+2} - 5\right) . \left(\sqrt{x^2+2} + 5\right) = \left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - 5^2 = x^2 + 2 - 25 = x^2 - 23$$

$$\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) . \left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right) = \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - x^2 = x^2 + x + 1 - x^2 = x + 1$$

Racines carrées et cubiques

Définitions

- Une racine carrée du nombre a est un nombre dont le carré vaut a.
  x est une racine carrée de a si et seulement si $x^2 = a$.

- Une racine cubique du nombre a est un nombre dont le cube vaut a.
  x est une racine cubique de a si et seulement si $x^3 = a$.

Ce n'est pas parce qu'un mathématicien définit quelque chose que cela existe !
Demande-lui de définir un mouton à 5 pattes et il inventera une théorie de 200 pages.
As-tu déjà vu un mouton à 5 pattes ?

-9 ne possède pas de racine carrée,

car un carré est toujours positif, il ne peut valoir -9.

Seuls les nombres positifs ont une racine carrée.

9 en a même deux : 3 et -3.

En effet, $3^2=9$ et $(-3)^2=9$ aussi !

Définition

$\sqrt{a}$ est la racine carrée positive du nombre a.
Condition d'existence : $a \geq 0$.

Propriétés

- Tout nombre strictement positif a possède deux racines carrées opposées, notées $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

- $\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{a}$ $\nearrow$ n'existe que si a est positif

$\sqrt{a}$ $\searrow$ désigne un réel positif

L'équation $x^2=a$

Complète le tableau.

$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$x^2 = 5$	$x^2 = 0$	$x^2 = -16$

Remarques

- Pour éviter de lire $\sqrt{a}$ « racine carrée positive de a »,

on lira $\sqrt{a}$ « radical de a ».

- $\sqrt{a^2} = |a|$

Par exemple,
si $a = 7$, $\sqrt{49} = 7 = |7|$.
si $a = -9$, $\sqrt{81} = 9 \neq a$. En fait, $\sqrt{81} = 9 = |-9| = |a| = -a$.

Propriétés

1. $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres positifs.

   Démonstration

   $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ est un nombre positif

   dont le carré vaut $a.b$.

   C'est donc bien la racine carrée positive de $a.b$.

2. $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ où a et b sont des nombres strictement positifs.

   Démonstration

   Les deux membres sont positifs.

   Elevons-les au carré.

   $a + b < \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$

   $a + b < a + 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + b$

   $0 < 2\sqrt{a}.\sqrt{b}$ cqfd

Exposants rationnels[1]

$$a^{\frac{p}{r}} = \sqrt[r]{a^p}$$

Dans cette formule, p et r sont des entiers $(r > 0)$ et $a > 0$.

Pourquoi $a > 0$?
Parce que $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$
et ce bon vieux radical ne mange que des nombres positifs.
Et $a = 0$?
$0^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{0^1} = \sqrt{0} = 0$ pas de problème, mais
$a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^{-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{a}}$ et là ça coince !

[1]Un nombre rationnel peut s'écrire comme une fraction à termes entiers.

Exemples

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$
$$a^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^7}}$$

Fonction du premier degré

- Une fonction f est du premier degré si $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.
- m est appelé pente ou coefficient directeur de la fonction.

Propriétés

- Le graphe d'une fonction du premier degré est une droite.
- Lorsque x augmente de 1 unité, f(x) augmente de m unités.

Exemples

x	$f(x) = 2x + 6$	
0	6	$\xleftarrow{+2}$
1	8	$\xleftarrow{+2}$
2	10	$\xleftarrow{+2}$
3	12	
-1	4	
-2	2	
-3	0	

x	$g(x) = -3x + 7$	
0	7	$\xleftarrow{-3}$
1	4	$\xleftarrow{-3}$
2	1	$\xleftarrow{-3}$
3	-2	
-1	10	
-2	13	
-3	16	

Racine et signe

Une fonction du premier degré possède une seule racine, obtenue en résolvant $f(x) = 0$.

Son signe est obtenu de la manière suivante :

Si m>0

x		$-\frac{p}{m}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

Si m<0

x		$-\frac{p}{m}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$

Exemples

x		-3	
$f(x) = 2x + 6$	$-$	0	$+$

x		$\frac{7}{3}$	
$g(x) = -3x + 7$	$+$	0	$-$

Et si m=0 ?

- $f(x) = p$ définit une fonction constante (droite horizontale).

Inéquations du premier degré

Définitions

• Une équation est une relation d'égalité qui peut être vraie ou fausse.
Exemple : $2x - 1 = 0$ est faux pour $x = 10$ ou $x = 1$ et vraie pour $x = \frac{1}{2}$.

• Une inéquation est une relation d'inégalité qui peut être vraie ou fausse.
Exemple : $2x - 1 > 0$ est vrai pour $x = 10$ ou $x = 1$ et faux pour $x = \frac{1}{2}$.

• Résoudre une (in)équation, c'est déterminer dans quel cas elle est vraie.

• Une telle valeur de l'inconnue est appelée **solution.**

Propriétés

• Il est possible de résoudre une inéquation du premier degré à l'aide d'un tableau de signe, à condition que le second membre soit 0 (ou le premier).

Cette méthode sera utilisée pour d'autres inéquations.

• Ajouter un même nombre aux deux membres d'une (in)équation ne change pas ses solutions.

• Multiplier les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement **positif** ne change pas ses solutions.

• Multiplier les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement **négatif** ($m < 0$) ne change pas ses solutions **à condition d'inverser le signe de l'inéquation.**

Réponse aux exercices

Puissances

Effectue. La réponse est un nombre.

1. -1
2. -1
3. 1
4. 1
5. $\dfrac{1}{16}$
6. -25
7. $-\dfrac{1}{125}$
8. 16
9. -8

10. 125
11. $-\frac{1}{27}$
12. 9
13. $-\frac{1}{2}$
14. -9
15. $\frac{16}{81}$
16. -64
17. 64
18. 625
19. $\frac{9}{4}$
20. $\frac{81}{16}$
21. $-\frac{1}{64}$

Écris à l'aide de puissances au numérateur uniquement

1. $x^3.y^{-2}$
2. $x^4.y^3$
3. $x^{-3}.y^{-2}$
4. $x^{-5}.y^3$
5. $x^3y^{-4}.z^2$
6. $4x^{-3}.y^{-2}$
7. $-\frac{4x^{-3}.y^2}{3}$
8. $\frac{x^3z^{-3}.y^2}{5}$
9. $\frac{x^{-3}.y^{-2}.z^6}{4}$
10. $\frac{x^3y^{-3}z^4}{3}$
11. $\frac{x^{-3}.y^{-4}.z^{-3}}{3}$
12. $\frac{-5x^9.y^4.z^{-14}}{2}$

Écris à l'aide de puissances à exposant positif

1. $\frac{x}{y^3}$
2. $\frac{7x^2}{y^3}$
3. $\frac{2y}{x^5}$
4. $-\frac{3}{x^2y^3}$
5. $2x^5$
6. $2x^5y^2$
7. $\frac{3x^5}{y^3}$
8. $\frac{-4y^5}{3x^3}$
9. $\frac{x}{3y^5}$
10. $\frac{1}{9x^6y^2}$
11. $-\frac{x^2}{4y^5}$
12. $\frac{16y^{18}}{81x^{14}}$

a²-b²

$$a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$$

Effectue

1. $x^2 - 4$
2. $\frac{a^4}{9} - \frac{4b^2}{25}$
3. $4a^2 - 25c^2$
4. $81k^4 - 16$

5. $3x^2 - 12$
6. -1
7. 5
8. -18

Factorise

1. $3x\,(y+z)$
2. $(2a-5b)\,.\,(2a+5b)$
3. $x.\,(x-4)\,.\,(x+4)$
4. $5x^2.\,(x-2)\,.\,(x+2)$
5. $4\,(x+5)\,(x-2)$
6. $(3x-4)\,.\,(-x+2)$
7. $(x-2)\,.\,(x+2)\,.\,\left(x^2+4\right)$
8. $24x$
9. $\left(x^2-2x+3\right).\left(x^2+2x-3\right)$

Chasse les radicaux du dénominateur

1. $7-4\sqrt{3}$
2. $\sqrt{2}-1$
3. $14+5\sqrt{3}$
4. $\dfrac{15+5\sqrt{2}}{7}$
5. $-\dfrac{3\sqrt{10}-9\sqrt{2}}{4}$
6. $\dfrac{7\sqrt{5}-7\sqrt{3}}{2}$
7. $\dfrac{60+8\sqrt{5}}{41}$
8. $7+4\sqrt{3}$
9. $-4\sqrt{3}-2\sqrt{15}$
10. $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$
11. $\dfrac{3\sqrt{10}+3\sqrt{5}}{5}$
12. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$

Racines

a) Simplifie les radicaux.

b) Effectue, si possible.

c) Chasse les radicaux du dénominateur s'il y en a.

1. $9\sqrt{2}$
2. $10\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{3}$
4. $-4\sqrt{2}-8\sqrt{5}+9\sqrt{3}$
5. $-7\sqrt{3}+2\sqrt{5}$
6. $\dfrac{23\sqrt{7}}{7}$
7. $9\sqrt{7}$
8. $\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$
9. $2\sqrt{3}$
10. $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}$
11. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{30}}{3}$

12. $24\sqrt{6}$

13. $-6+9\sqrt{3}$

14. $6\sqrt{15}-8\sqrt{30}-54+72\sqrt{2}$

15. $12+8\sqrt{2}$

16. $\dfrac{4\sqrt{6}-3\sqrt{15}}{3}$

17. $-\dfrac{3}{8}$

18. $7+4\sqrt{3}$

19. $2\sqrt[3]{4}$

20. $-3\sqrt[3]{3}$

21. $3\sqrt[3]{2}$

22. 0

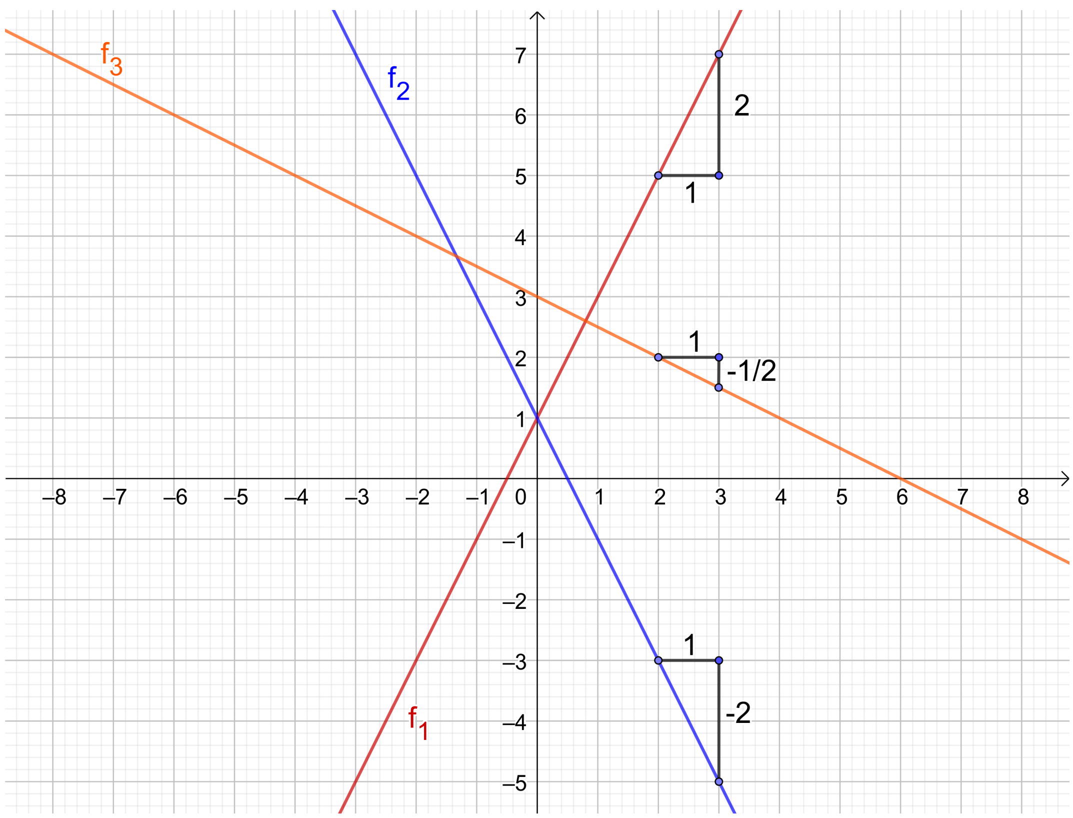
23. $0,2$

24. $5\sqrt[3]{3}$

25. 0

26. $4\sqrt[3]{10}$

Fonctions du premier degré



x		$-\frac{1}{2}$	
$2x+1$	$-$	0	$+$

Pente : 2

x		$\frac{1}{2}$	
$-2x+1$	$+$	0	$-$

Pente : -2

x		6	
$-\frac{1}{2}x+3$	$+$	0	$-$

Pente : $-\dfrac{1}{2}$

2

Exercices supplémentaires

1. Transforme les exposants fractionnaires en radicaux et simplifie si possible :

   (a) $2^{\frac{1}{3}} =$ $\sqrt[3]{2}$

   (b) $3^{\frac{1}{2}} =$ $\sqrt{3}$

   (c) $2^{-\frac{1}{3}} =$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

   (d) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} =$ $\dfrac{5}{4}$

   (e) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} =$ $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

   (f) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} =$ $\dfrac{2}{3}$

   (g) $27^{\frac{2}{3}} =$ 9

   (h) $0,01^{-\frac{1}{2}} =$ 10

2. Écris les expressions sous forme d'**une** puissance de a (a réel positif non nul).

   (a) $\sqrt{a}.a =$ $a^{\frac{3}{2}}$

   (b) $\sqrt[3]{a^5}.\sqrt[3]{a}.a^{-1} =$ a

   (c) $\left(a^4\right)^{\frac{2}{3}} =$ $a^{\frac{8}{3}}$

   (d) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 =$ a^2

   (e) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} =$ a^{-1}

   (f) $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{a}} =$ $a^{\frac{5}{3}}$

   (g) $\left(\dfrac{4}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.\dfrac{a^3}{2} =$ $a^{\frac{5}{2}}$

   (h) $\dfrac{\left(a^{-4}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(a^2\right)^{-\frac{1}{3}}} =$ a^{-2}

3. Reprends les réponses de l'exercice précédent.
   Donne ensuite une réponse avec des exposants naturels uniquement.

Inéquations du premier degré

1. $x > -\frac{4}{3}$ $\quad S = \left]-\frac{4}{3}; \rightarrow\right[= \left]-\frac{4}{3}; +\infty\right[$
2. $x \leq \frac{1}{2}$ $\quad S = \left]\leftarrow; \frac{1}{2}\right] = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$
3. $x \leq \frac{1}{3}$ $\quad S = \left]\leftarrow; \frac{1}{3}\right] = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$
4. $x > \frac{3}{4}$ $\quad S = \left]\frac{3}{4}; \rightarrow\right[= \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$
5. $x \geq -\frac{1}{3}$ $\quad S = \left[-\frac{1}{3}; \rightarrow\right[= \left[-\frac{1}{3}; \rightarrow\right[$
6. $x > -\frac{5}{3}$ $\quad S = \left]-\frac{5}{3}; \rightarrow\right[= \left]-\frac{5}{3}; +\infty\right[$
7. $x > 1$ $\quad S =]1; \rightarrow[=]1; +\infty[$
8. $x < \frac{4}{3}$ $\quad S = \left]\leftarrow; \frac{4}{3}\right[= \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[$

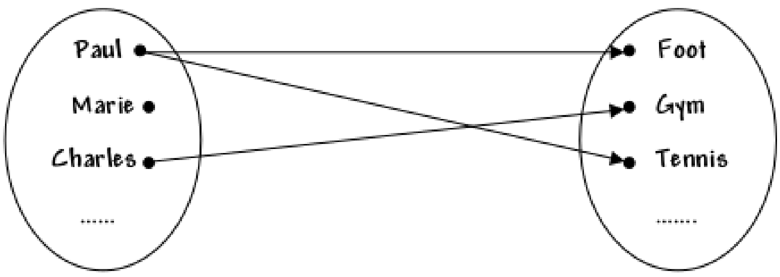
2.1 Caractéristiques d'une fonction

A retenir

Relation

Une relation entre deux ensembles est un ensemble de couples dont chaque premier élément appartient au premier ensemble (antécédent) et chaque deuxième élément appartient au deuxième ensemble (image).

Exemple



On peut établir une relation entre l'ensemble des élèves et le(s) sport(s) éventuellement pratiqué(s).

(Paul, Foot)

(Paul, Tennis)

(Charles, Gym)

ou plus simplement,

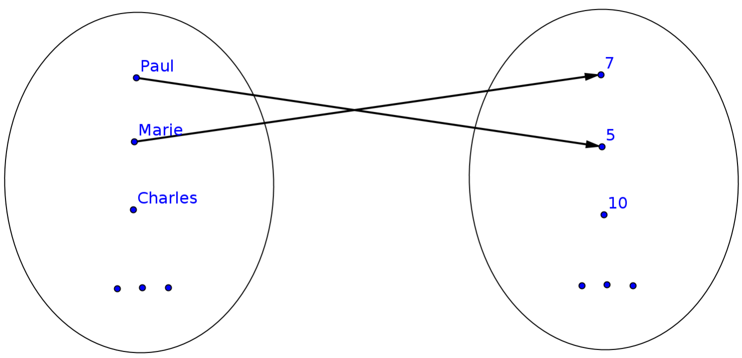
Prénom	Sport
Paul	Foot
Paul	Tennis
Charles	Gym
...	...
...	...

Fonction

Une fonction est une relation pour laquelle chaque antécédent possède une image.

Exemple

On peut établir une fonction entre l'ensemble des élèves et leurs résultats lors d'un test en français.



(Paul, 5)

(Marie, 7)

ou plus simplement,

Prénom	Résultat
Paul	
...	...
...	...

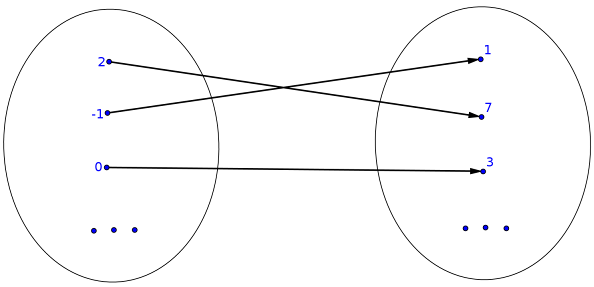
Dans le cadre de ce cours, nous travaillerons avec des fonctions numériques (d'une variable réelle), ce qui signifie que les antécédents et les images sont des nombres réels.

Notation

Une fonction numérique est généralement notée : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$
où x est la variable réelle (un antécédent quelconque)
et $f(x)$ est l'image de x.

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x + 3$



C'est bien une fonction car chaque nombre réel x a une image $f(x) = 2x+3$.
Par exemple, $f(2) = 7$ et $f(-1) = 1$.

Domaine

Le domaine est l'ensemble des antécédents qui ont une image.

$dom\, f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$

Domaine et opérations

Beaucoup de fonctions de ce cours sont définies
à l'aide des opérations
+ (addition)
- (soustraction)
$\times$ (multiplication)
: (division)
$\sqrt{\ }$ (radical).
+ (addition), - (soustraction) et $\times$ (multiplication)

ne donnent pas de condition d'existence.

Pour : (division) le dénominateur doit être différent de 0.

Pour $\sqrt{}$ (radical) l'opérande doit être positive.

$\frac{a}{b}$	CE : $b \neq 0$
$\sqrt{a}$	CE : $a > 0$

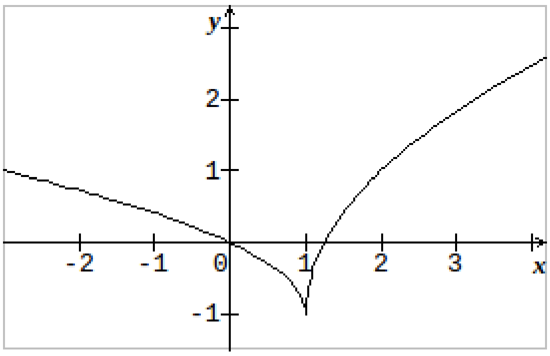
Condition d'existence et intervalle

Condition d'existence	Ensemble des x
$x > a$	$]a; \rightarrow[$
$x \geq a$	$[a; \rightarrow[$
$x < a$	$]\leftarrow; a[$
$x \leq a$	$]\leftarrow; a]$

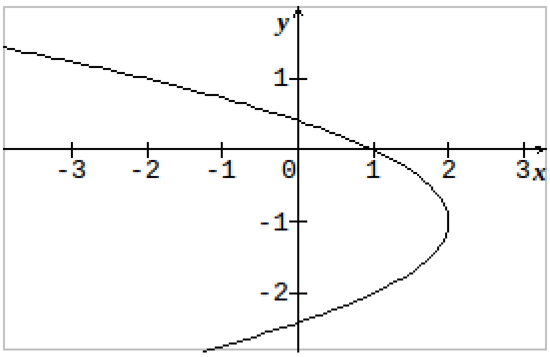
Graphe

Le graphe d'une fonction est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ où x appartient au domaine.

Exemple de graphe de fonction numérique



Contre-exemple



Test de la verticale

Un courbe du plan est la représentation graphique d'une fonction si et seulement si aucune droite verticale ne la coupe plus d'une fois.

Ensemble-image

L'ensemble des $f(x)$ tels que x appartient au domaine est l'ensemble des images.

Racines ou zéros d'une fonction

Définition

On appelle zéro (ou racine) d'une fonction tout réel dont l'image par f est nulle.

Propriétés

1. Graphiquement, les zéros (ou racines) d'une fonction correspondent aux abscisses des éventuels points d'intersection du graphe avec l'axe Ox.
   Notation : $f \cap Ox$

2. Les racines d'une fonction sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

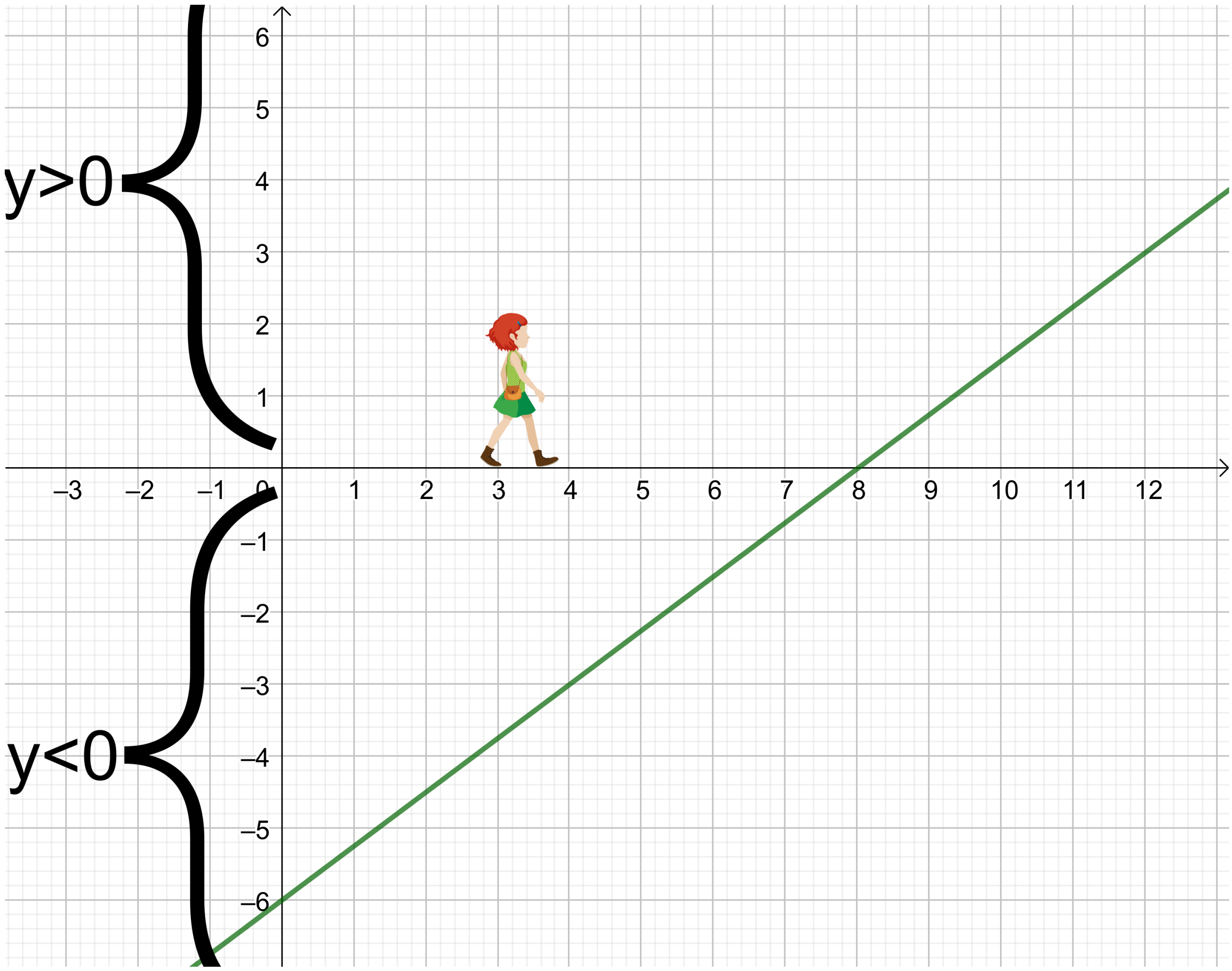
Signe d'une fonction

Le signe d'une fonction est le signe de ses images.

Les images se trouvent sur l'axe vertical, qui est orienté vers le haut.

Ainsi, lorsqu'une fonction est positive, son graphique se trouve au-dessus de l'axe des x.

Lorsqu'une fonction est négative, son graphique se trouve en dessous de l'axe des x.



Cette fonction est négative pour x<8 et positive pour x>8.

Fonctions du premier degré (rappel)

Définition

Une fonction du premier degré est donnée par $f(x) = mx + p$ où $m \neq 0$.

Exemples

1. $f : x \to x - 4$ $\quad m =$ $\quad p =$
2. $f : x \to -2x + 8$ $\quad m =$ $\quad p =$
3. $f : x \to 3 - x$ $\quad m =$ $\quad p =$

Signe

Si m est positif				Si m est négatif			
x	$x < x_1$	x_1	$x > x_1$	x	$x < x_1$	x_1	$x > x_1$
$mx + p$	$-$	0	$+$	$mx + p$	$+$	0	$-$

Exemple

Quel est le signe de $f(x) = -2x + 3$?

Racine : $x_1 = \dfrac{3}{2}$ (sol. de l'équation -2x+3=0)

Vu que $m : -2$ est négatif, nous obtenons le tableau de signes suivant :

x	$x < \frac{3}{2}$	$\dfrac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$-2x+3$	$+$	0	$-$

Cette colonne ↑ représente toutes les valeurs de x inférieures à 3/2. J'y mets le signe contraire de m. Vérification : Prenons par exemple $x = 1$. $mx + p$ devient $-2.1 + 3 = 1$. Résultat positif (+) !	Cette colonne ↑ représente toutes les valeurs de x supérieures à 3/2. J'y mets le signe de m. Vérification : Prenons par exemple $x = 4$. Le binôme devient $-2.4 + 3 = -5$. Résultat négatif (-) !

Trace le graphique de cette fonction.

Réponse aux exercices

1. Parmi les énoncés suivants, quels sont ceux qui se rapportent à une fonction dans $\mathbb{R}$?

   (a) $x \to x^2$ Fonction

   (b) $x \to \sqrt[3]{x}$ Fonction

   (c) $x \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{x} \\ \searrow -\sqrt{x} \end{array}$ Relation non fonctionnelle

   (d) $x \to \dfrac{x}{2}$ Fonction

   (e) $x \to |x|$ Fonction

   (f) $x \to \dfrac{1}{x}$ Fonction

   (g) $|x| \begin{array}{l} \nearrow x \\ \searrow -x \end{array}$ Relation non fonctionnelle

2. Parmi les graphes suivants, quels sont ceux qui représentent une fonction numérique ? Donne son domaine et son ensemble-image.

(a) Fonction $dom\, f = [-3; 3]$ $im\, f = [-4; +\infty[$

(b) Pas une fonction $dom\, f = [-2; 2]$ $im\, f = [-2; 2]$

(c) Pas une fonction $dom\, f = [0; 3]$ $im\, f = [-4; 4]$

(d) Fonction $dom\, f =]-2,5; 2,5[$ $im\, f = [0; 6[$

(e) Fonction $dom\, f = [-6,2; 6,2]$ $im\, f = [0; 1]$

(f) Fonction $dom\, f = [-1; 4[$ $im\, f = [-4; 5[$

3. Détermine le domaine de la fonction f.

(a) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

(b) $[1; \rightarrow[$

(c) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

(d) $[-1; \rightarrow[$

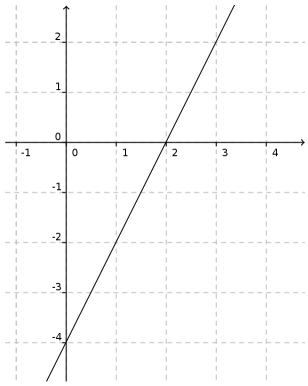
(e) $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

4. Détermine le domaine et l'intersection avec les axes de coordonnées de la fonction f

	Domaine	$f \cap Ox$	$f \cap Oy$
a)	$dom f = \mathbb{R}$	$f \cap Ox :\ (-1;0)\ et\ (3;0)$	$f \cap Oy :\ (0;2)$
b)	$dom f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$f \cap Ox :\ \left(\frac{3}{2};0\right)$	$f \cap Oy :\ (0;3)$
c)	$\mathbb{R}$	$(0;0)$ $\left(\sqrt{3};0\right)$ et $\left(-\sqrt{3};0\right)$	$(0;0)$
d)	$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_0$	$\varnothing$	$\varnothing$
e)	$\mathbb{R}$	$(1;0)$	$(0;-1)$
f)	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$	$\left(-\frac{3}{2};0\right)$	$(0;-3)$
g)	$\mathbb{R} \setminus \{0;5\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
h)	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{7}\right\}$	$\varnothing$	$\left(0;-\frac{2}{3}\right)$
i)	$\left]\leftarrow;\frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$(0;1)$
j)	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$(0;1)$
k)	$]-4;\rightarrow[$	$\varnothing$	$\left(0;-\frac{9}{2}\right)$
l)	$]\leftarrow;1[$	$\varnothing$	$(0;-2)$
m)	$\left]\frac{3}{2};\rightarrow\right[$	$\varnothing$	$\varnothing$
n)	$]1;\rightarrow[$	$(2;0)$	$\varnothing$
o)	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$(-1;0)$	$(0;1)$
p)	$[-4;1[\cup]1;\rightarrow[$	$(-4;0)$	$(0;-2)$
q)	$]\leftarrow;-4[\cup]-4;3]$	$(3;0)$	$\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)$
r)	$\left]\leftarrow;\frac{1}{2}\right]$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(0;-\frac{1}{2}\right)$
s)	$\left[-3;\frac{1}{4}\right]$	$(-3;0)$	$\left(0;\sqrt{3}\right)$
t)	$\left]\frac{1}{2};\rightarrow\right[$	$\varnothing$	$\varnothing$
u)	$]1;2]$	$(2;0)$	$\varnothing$

5. Détermine le domaine, les intersections avec les axes, le tableau de signe et le tableau de variation de la fonction f . Trace ensuite son graphique.

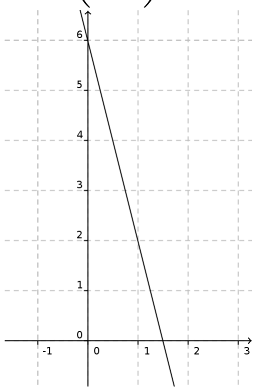
(a) $f(x) = 2x - 4$ $\quad dom f = \mathbb{R}$ $\quad G \cap Ox :\ (2;0)$ $\quad G \cap Oy :\ (0;-4)$



x		2	
$2x-4$	$-$	0	$+$

x	
f	$\nearrow$

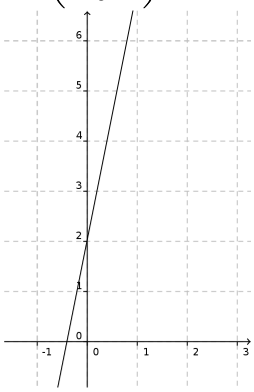
(b) $f(x) = 6 - 4x$ $\quad dom f = \mathbb{R}$ $\quad G \cap Ox : \left(\dfrac{3}{2}; 0\right)$ $\quad G \cap Oy : (0; 6)$



x		$\dfrac{3}{2}$	
$6-4x$	$+$	0	$-$

x	
f	$\searrow$

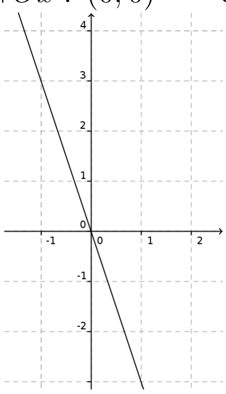
(c) $f(x) = 5x + 2$ $\quad dom f = \mathbb{R}$ $\quad G \cap Ox : \left(-\dfrac{2}{5}; 0\right)$ $\quad G \cap Oy : (0; 2)$



x		$-\dfrac{2}{5}$	
$5x+2$	$-$	0	$+$

x	
f	$\nearrow$

(d) $f(x) = -3x$ $\quad dom f = \mathbb{R}$ $\quad G \cap Ox : (0; 0)$ $\quad G \cap Oy : (0; 0)$



x		0	
$-3x$	$+$	0	$-$

x	
f	$\searrow$

2.2 Variation et parité

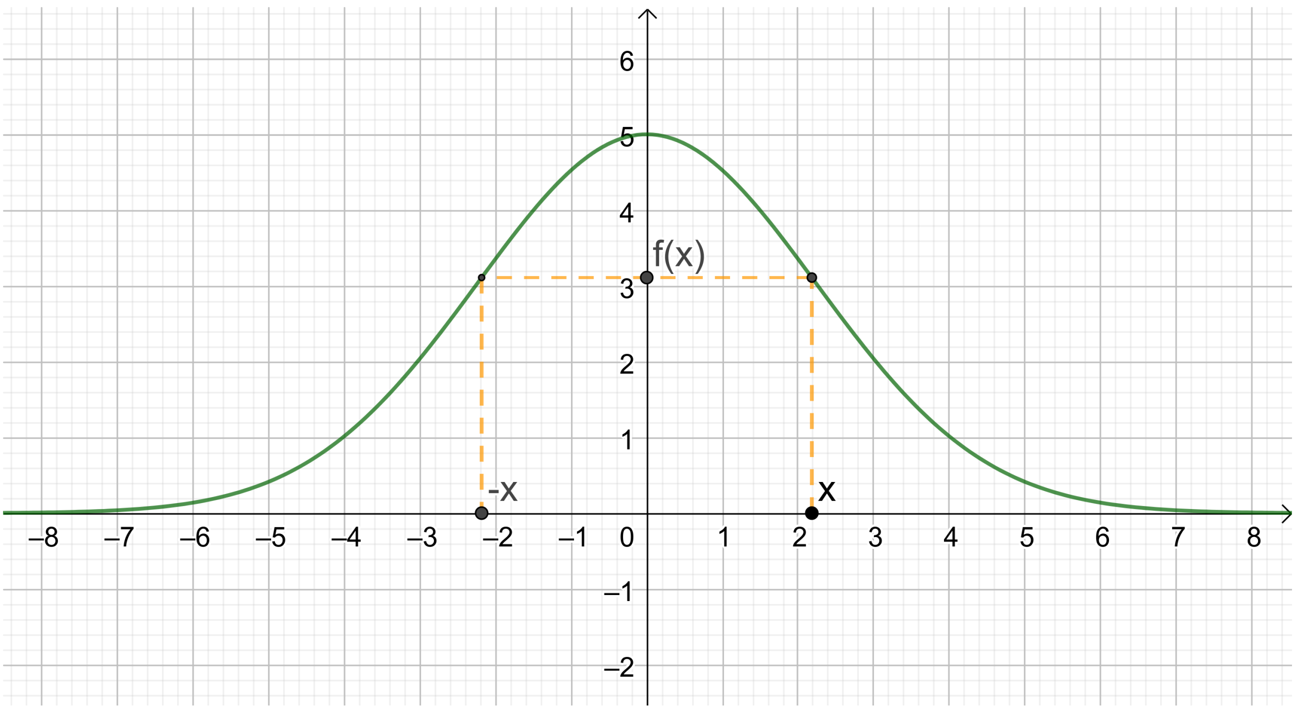
A retenir

Définitions

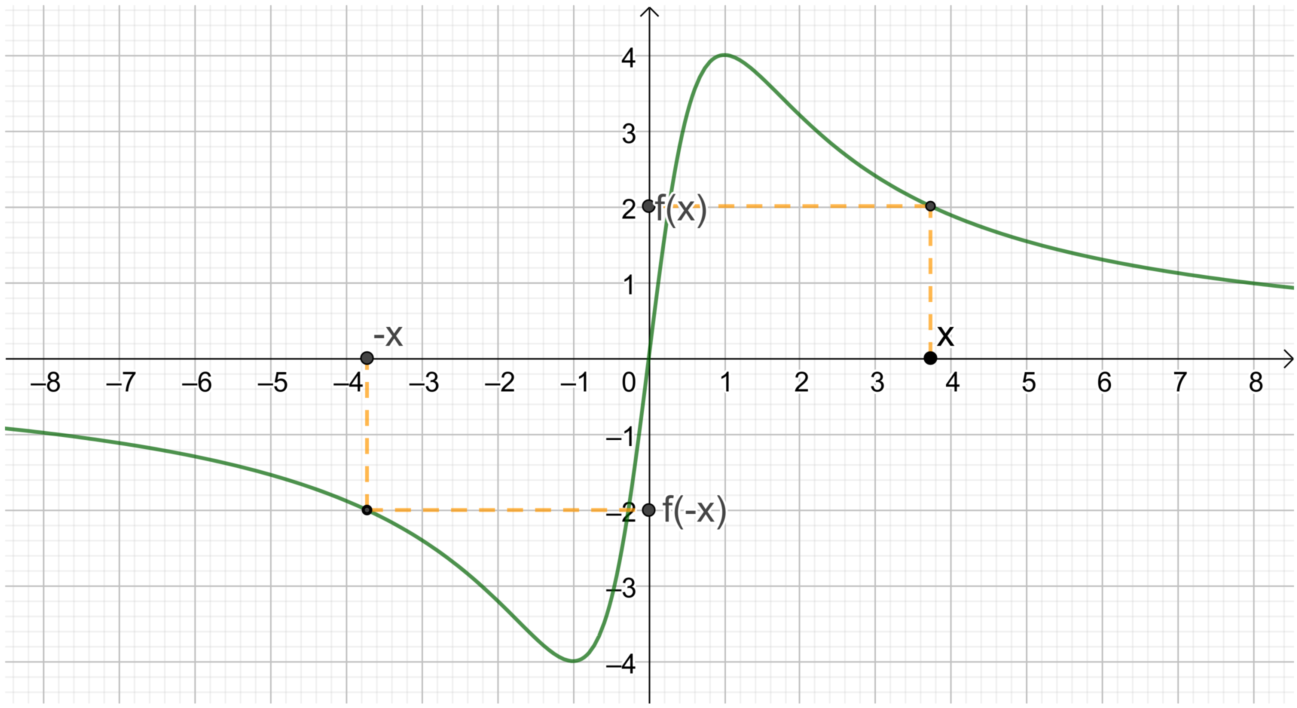
• Une fonction f est croissante lorsque plus x est grand, plus f(x) est grand.
f est une fonction croissante ssi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
• Une fonction f est décroissante lorsque plus x est grand, plus f(x) est petit.
f est une fonction croissante ssi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
• Une fonction f est paire lorsque f(-x)=f(x), pour tout x de son domaine.
• Une fonction f est impaire lorsque f(-x)=-f(x), pour tout x de son domaine.

Propriétés

• Une fonction paire admet l'axe des ordonnées (y) comme axe de symétrie.



• Une fonction impaire admet le point $(0;0)$ comme centre de symétrie.



Réponse aux exercices

1. $dom\, f = [-5; 5]$ $\quad im\, f = [-1; 1, 5]$
   f est strictement croissante sur $[-2; 1] \cup [4; 5]$
   f est strictement décroissante sur $[-5; -2] \cup [3; 4]$
   f est constante sur $[1; 3]$

2. Pour la fonction, détermine :

   (a) $\mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$

   (b) $f(-4) = -\frac{3}{2}$ $\quad f(2) = -2$

   (c) $f(1) = -1$ $\quad f(4) = 2$

   (d) $-\frac{7}{2}$ $\quad 2$ $\quad 6$

   (e) $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$ $\quad f(4) = 2$

   (f) $Max\ (4; 2)$ $\quad Min\ (2; -2)$

   (g) 0 $\quad 3$ $\quad 5$

   (h)

x		$-\frac{5}{2}$		2		4	
$f(x)$	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$

3. On étudie l'efficacité (en pourcentage) d'une poudre à laver en fonction de la température d'utilisation de l'eau de lavage utilisée.

(a)

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f(x)$	12	20	40	85	100	80	50	35	20	10	7

(b) 40°

(c) à 28° et 50°

(d) entre 28° et 50°

(e)

x	0		40		100
f	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m_2

2

4. Justifie

(a) $f(-x) = 2x^4 + 3x^2 - 4 = f(x)$ La fonction est paire.

(b) $f(-x) = -3x^3 + x = -(3x^3 - x) = -f(x)$ La fonction est impaire.

(c) $f(-x) = -2x^3 + 1 = -(2x^3 - 1)$ La fonction n'est ni paire ni impaire.

5. Graphique complet de 2 fonctions

(a) $dom\, f = [-7; 5]$

$im\, f = [-3; 5]$

zéros : -6 et -1

$f \cap Oy :\ (0; 2)$

Ni paire, ni impaire

x	-7		-3		3		5
$f(x)$	4	$\searrow$	m	$\nearrow$	5	$\searrow$	2

(b) $dom\, h = [-3; 3]$

$im\, h = [-15; 15]$

zéros : -2, 0 et 2

$h \cap Oy :\ (0; 0)$

Impaire

x	-3		-1		1		3
$h(x)$	-15	$\nearrow$	M	$\searrow$	-4	$\nearrow$	15

6. Étude algébrique de la parité

(a) $f(-x) = 2x^4 + 3x^2 - 4 = f(x)$ La fonction est paire.

(b) $f(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$ La fonction est impaire.

(c) $f(-x) = -x^3 - 1$ La fonction n'est ni paire ni impaire.

(d) $f(-x) = \dfrac{1}{x^2 + 4} = f(x)$ La fonction est paire.

(e) $f(-x) = \dfrac{x^2 + 7}{x^4} = f(x)$ La fonction est paire.

(f) $f(-x) = \dfrac{-x^3 - x}{2x^2} = -\dfrac{x^3 + x}{2x^2} = -f(x)$ La fonction est impaire.

(g) $f\left(-x\right)=\dfrac{-x^3+2x}{-x^5}$ La fonction est paire.

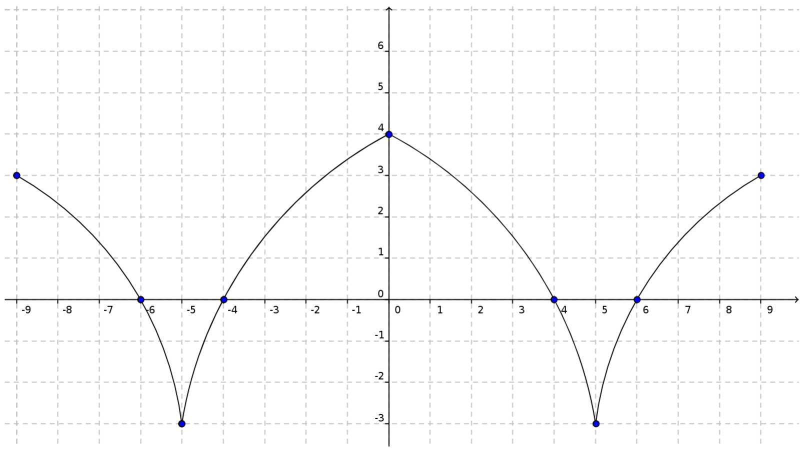
(h) $f\left(x\right)=\dfrac{x^4+x+1}{-x}$ La fonction n'est ni paire ni impaire.

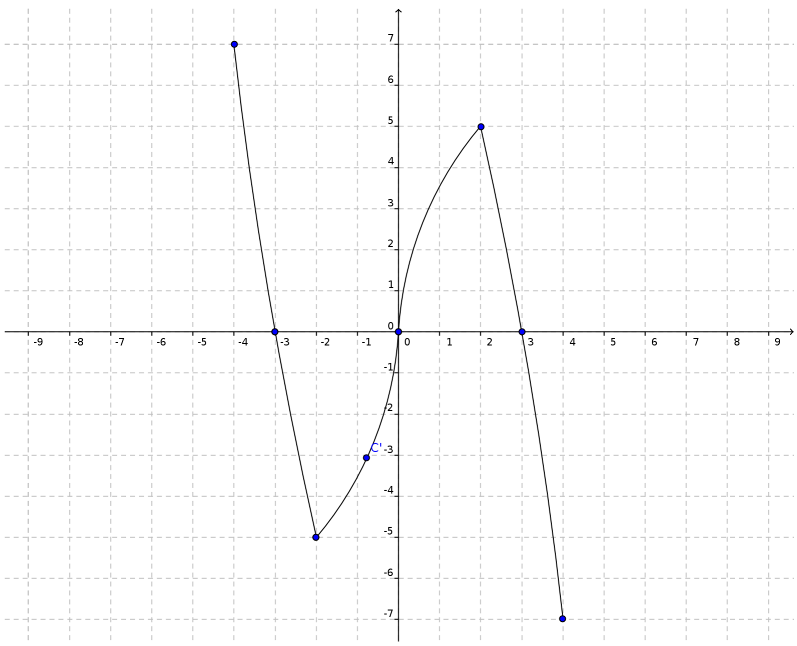
(i) $f\left(x\right)=\dfrac{x^4-1}{-x}=-\dfrac{x^4-1}{x}$ La fonction est impaire.

Exercices supplémentaires

Dans un repère cartésien du plan, invente le graphique d'une fonction possédant les caractéristiques suivantes :

1. f de domaine $[-9;9]$, paire , admettant 4 et 6 pour uniques zéros positifs, admettant un maximum pour $x=0$ et un minimum pour $x=5$.
2. g de domaine sur $[-4;4]$, impaire , admettant 0 et 3 pour zéros, telle que $img=[-7;7]$, possédant un maximum en 2 dont l'image est 5, croissante sur $[0;2]$ et décroissante sur$[2;4]$.

1. 

2. 

2.3 Les sept fonctions de référence

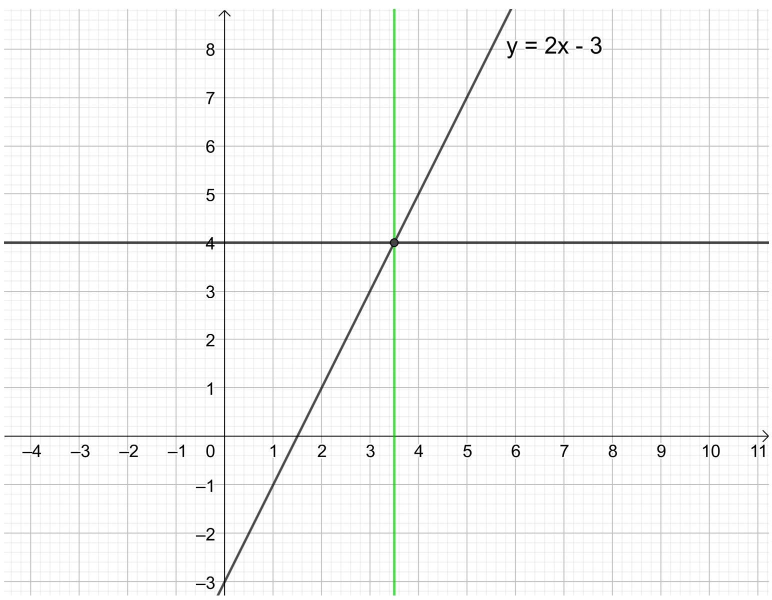
A retenir

Les points importants des 7 fonctions de référence, leurs graphiques, domaines, ensembles-images, tableaux de signe, tableaux de variation et parité.

Réponse aux exercices

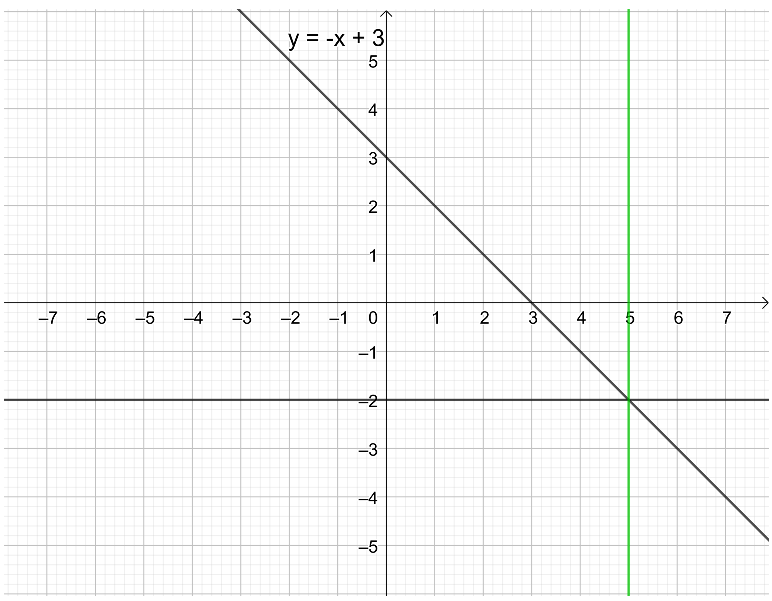
1. Résoudre algébriquement et graphiquement

(a)



$$2x-3=4$$
$$2x=7$$
$$x=\frac{7}{2}$$

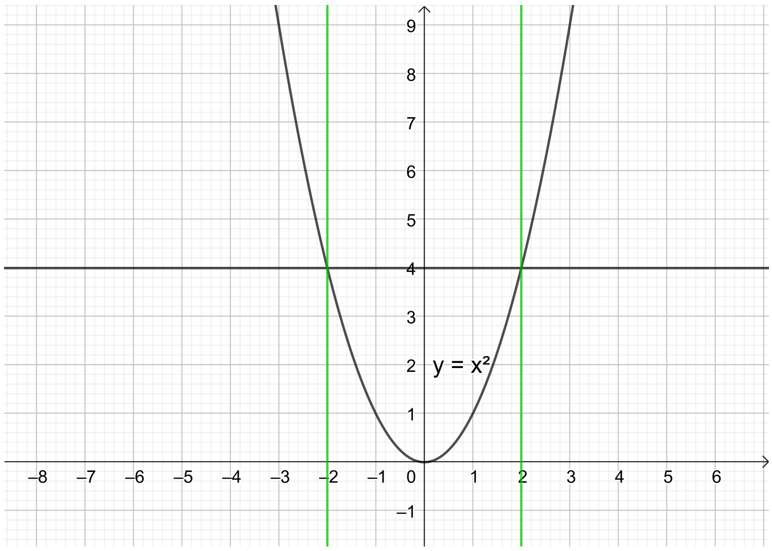
(b)



$$-x+3=-2$$
$$-x=-5$$
$$x=5$$

2

(c)

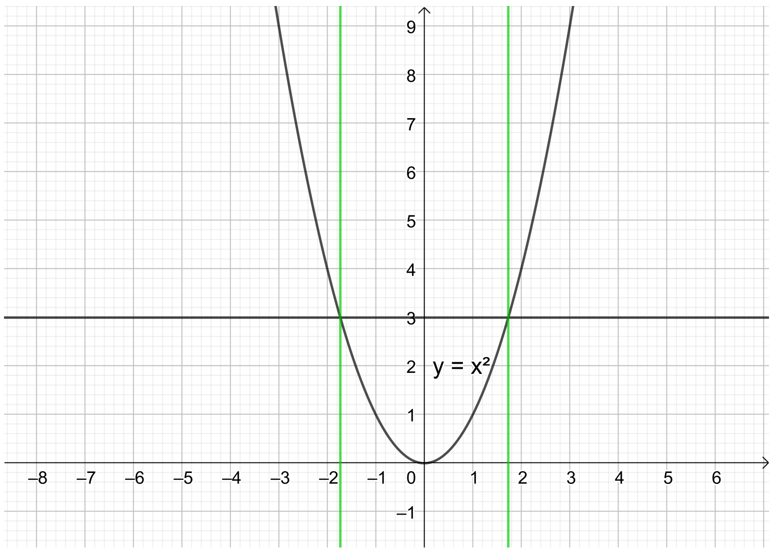


$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$x = 2$ ou $x = -2$

(d)



$x^2 = 3$

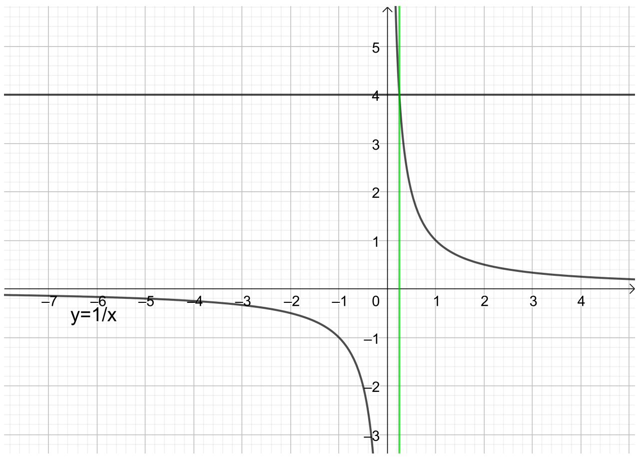
$x = \pm\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

En regardant le graphique,

$\sqrt{3} \cong 1,7$

(e)



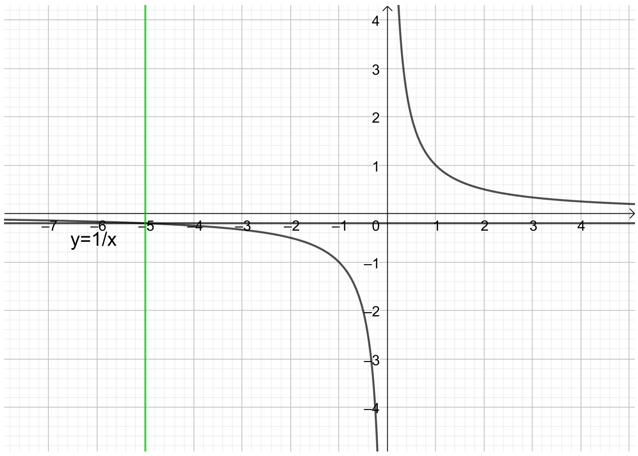
$\frac{1}{x} = 4$

$\frac{1}{x} = \frac{4}{1}$

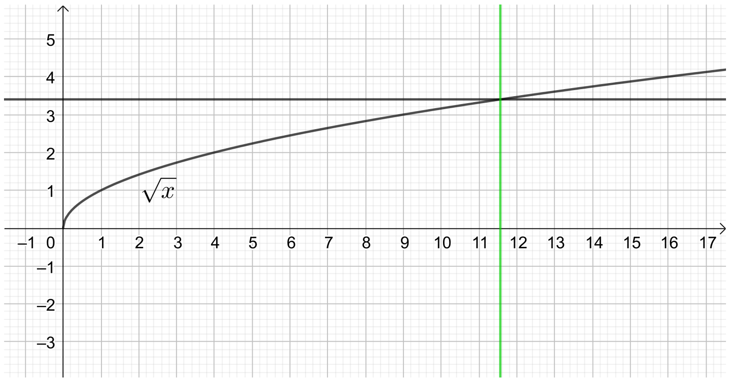
$\frac{x}{1} = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{4}$

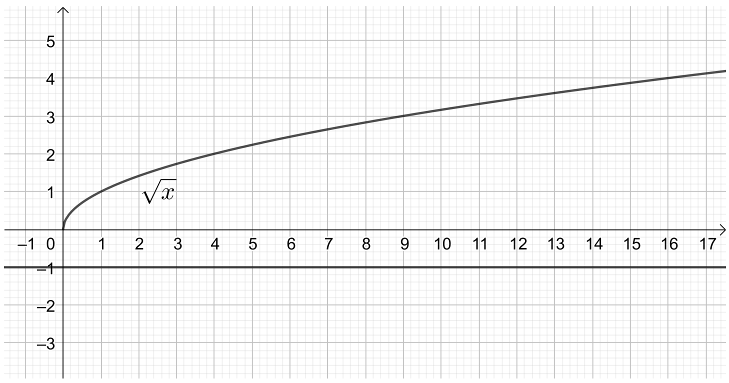
$\left(\frac{1}{4} = 0,25\right)$

(f) 

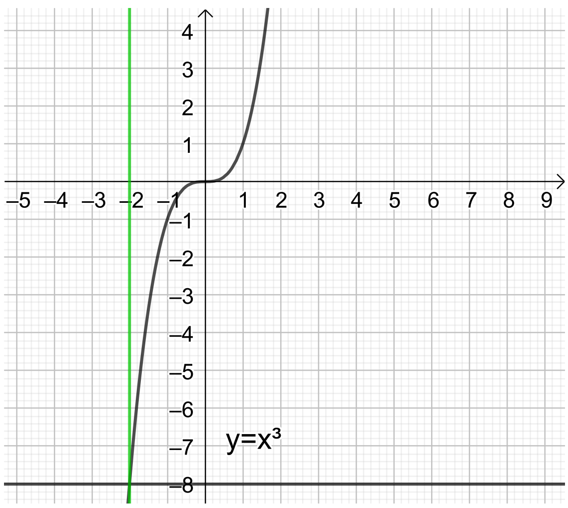
$\frac{1}{x} = -0,2$
$\frac{1}{x} = -\frac{2}{10}$
$\frac{x}{1} = -\frac{10}{2}$
$x = -5$
Heureusement qu'il y a la méthode algébrique !

(g) 

$\sqrt{x} = 3,4$
$x = 3,4^2$
Le graphique indique que $3,4^2 \cong 11,6$.
Vérifie à la calculette.

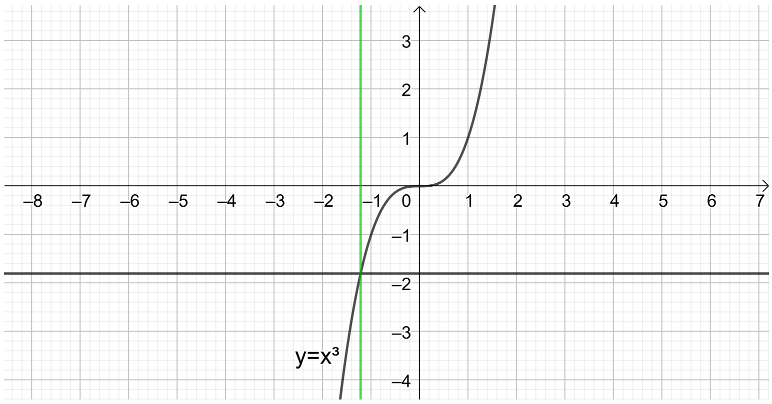
(h) 

$\sqrt{x} = -1$
$x = (-1)^2$
$x = 1$
Le graphique indique qu'il n'y a pas de solution !
En fait, dans $\sqrt{x} = -1$, les deux membres sont de signe strictement contraires.
Il n'y a donc pas de solution et il est strictement interdit d'élever au carré dans ce cas, sous peine d'inventer des solutions qui n'en sont pas.

(i) 

$x^3 = -8$
$x = -2$
Car $(-2)^3 = -8$
et tout nombre réel a une racine cubique.

(j)



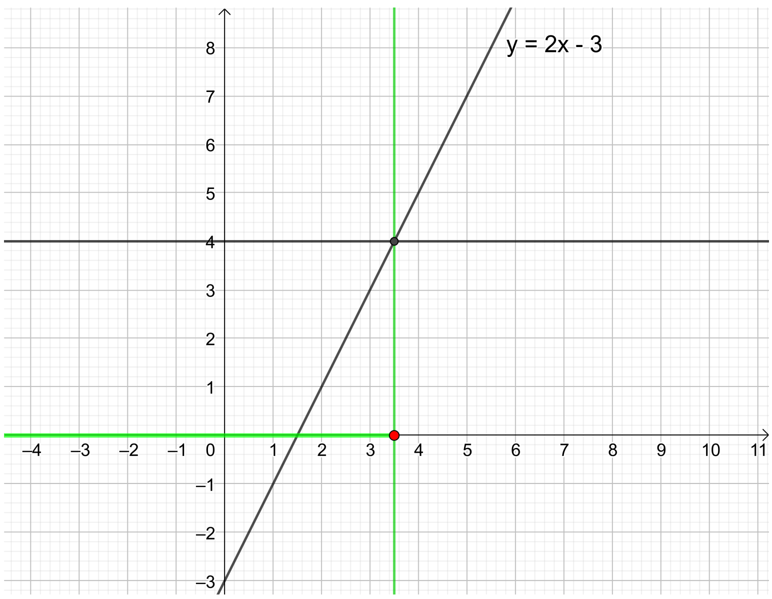
$x^3 = -1,8$

$x = -\sqrt[3]{1,8}$

Le graphique indique que $-\sqrt[3]{1,8} \cong -1,2$. Vérifie à la calculette.

2. Résoudre algébriquement et graphiquement

(a)



$2x - 3 < 4$

$2x < 7$

$x < \frac{7}{2}$

$S = \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$

$$2x - 3 < 4$$

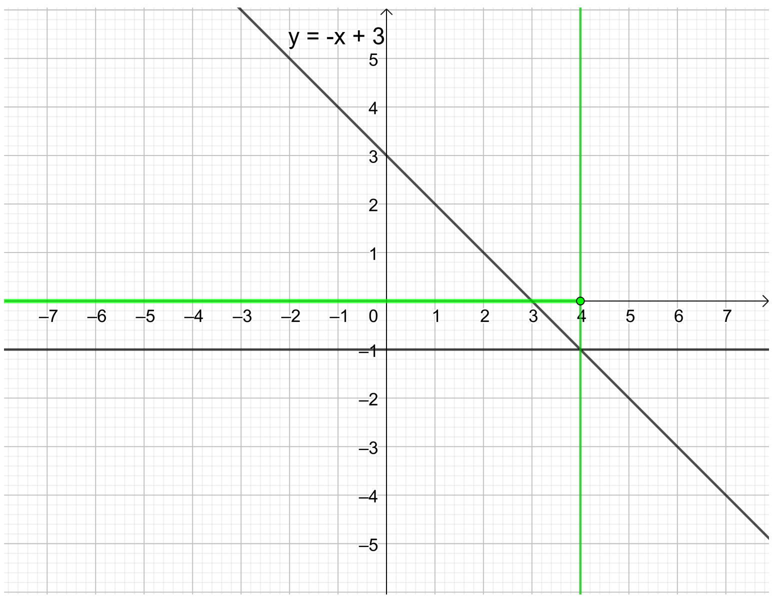
$$2x - 7 < 0$$

x		$\frac{7}{2}$	
$2x - 7$	$-$	0	$+$

$$x < \frac{7}{2}$$

$$S = \left]-\infty; \frac{7}{2}\right[$$

(b)



$-x + 3 \geq -1$

$-x \geq -4$

$x \leq 4$

La fonction est décroissante !

$S = \left]-\infty; 4\right]$

$$-x + 3 \geq -1$$

$$-x + 4 \geq 0$$

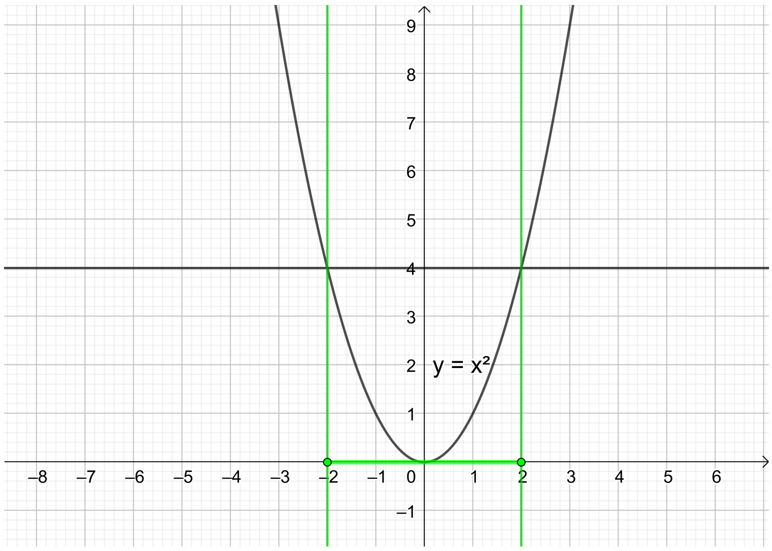
x		4	
$-x + 4$	$+$	0	$-$

$$(m < 0)$$

$$x \leq 4$$

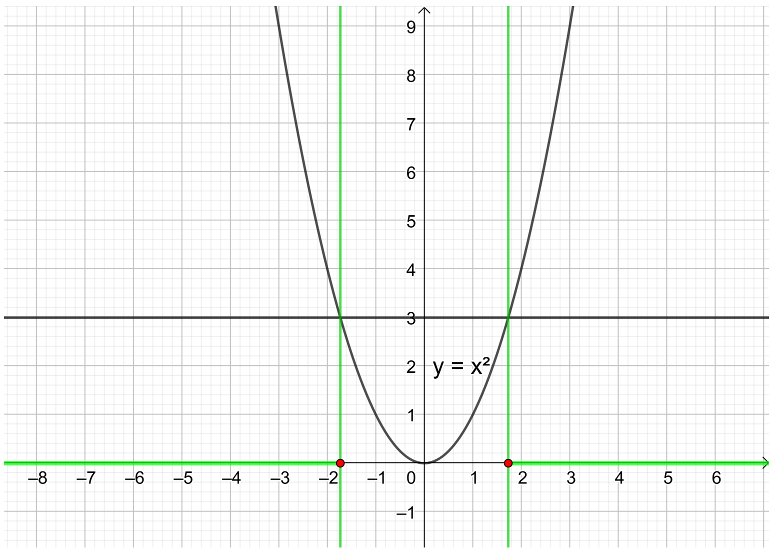
$$S = \left]-\infty; 4\right]$$

(c)



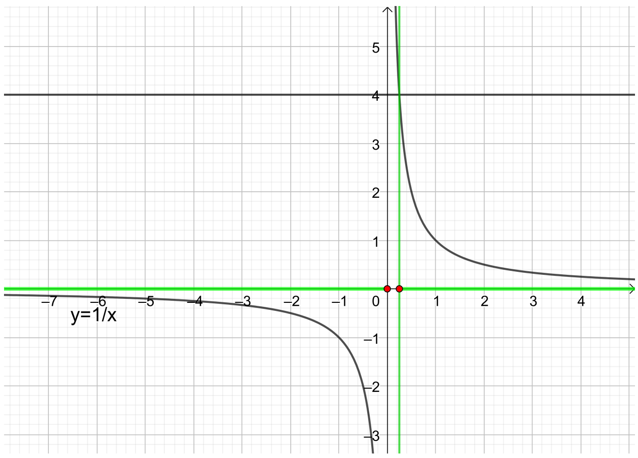
$x^2 \leq 4$
$x^2 = 4$ a 2 solutions : ± 2
En -2,
la fonction est décroissante :
$x \geq -2$.
En 2,
la fonction est croissante :
$x \leq 2$.
En tout : $-2 \leq x \leq 2$
$S = [-2; 2]$

(d)



$x^2 > 3$
$x^2 = 3$ a 2 solutions : $\pm\sqrt{3}$
En $-\sqrt{3}$,
la fonction est décroissante :
$x < -\sqrt{3}$.
En $\sqrt{3}$,
la fonction est croissante :
$x > \sqrt{3}$.
En tout : $x < -\sqrt{3}$ ou $x > \sqrt{3}$
$S =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$

(e)



$\frac{1}{x} < 4$

Sur le graphique,

à partir du point $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$

on trouve $x > \frac{1}{4}$

car la fonction est décroissante.

Mais il y a aussi

$x < 0$!

En tout : $x < 0$ **ou** $x > \frac{1}{4}$

$S = \left]-\infty; 0\right[\cup \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

$$\frac{1}{x} < 4$$

$$\frac{1}{x} - 4 < 0$$

$$\frac{1 - 4x}{x} < 0$$

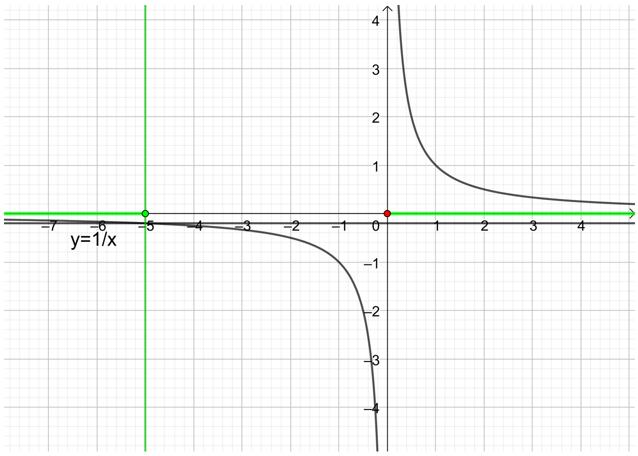
Tableau de signe :

x		0		$\frac{1}{4}$	
$1 - 4x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-4x}{x}$	$-$	$\mid$	$+$	0	$-$

En tout : $x < 0$ **ou** $x > \frac{1}{4}$

$S = \left]-\infty; 0\right[\cup \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

(f)



$\frac{1}{x} \geq -0,2$

Sur le graphique,

à partir du point $(-0,2; -5)$

on trouve $x \leq -5$

car la fonction est décroissante.

Mais il y a aussi

$x > 0$!

En tout : $x \leq -5$ **ou** $x > 0$

$S = \left]-\infty; -5\right] \cup \left]0; +\infty\right[$

$$\frac{1}{x} \geq -0,2$$

$$\frac{1}{x} + 0,2 < 0$$

$$\frac{1+0,2x}{x} < 0$$

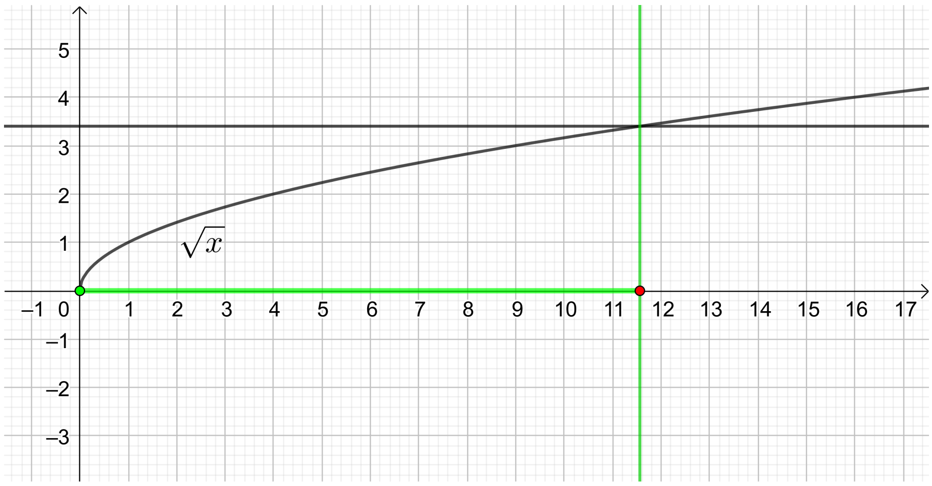
Tableau de signe :

x		-5		0	
$0,2 + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{1-4x}{x}$	$+$	0	$-$	$\mid$	0

En tout : $x \leq -5$ **ou** $x > 0$

$S = \left]-\infty; -5\right] \cup \left]0; +\infty\right[$

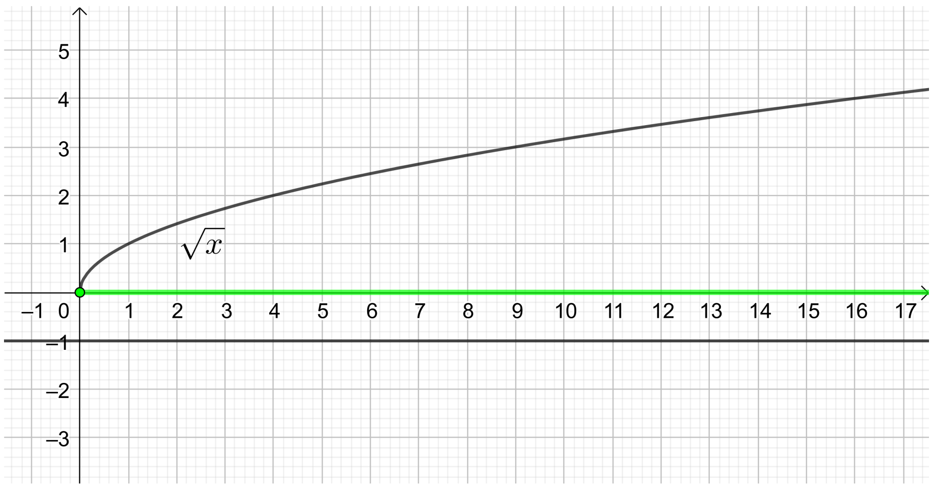
(g)



$\sqrt{x} < 3,4$
La fonction est strictement croissante.
En partant du point $(3,4^2;3,4)$
on obtient $x < 3,4^2$.
Attention au domaine
$x \geq 0$
En tout : $x \geq 0$ et $x < 3,4^2$
$S = [0;11,56[$

$\sqrt{x} < 3,4$
élevons au carré
on obtient $x < 3,4^2$.
Attention !
$x \geq 0$
Pourquoi ?
Domaine !
En tout : $x \geq 0$ et $x < 3,4^2$
$S = [0;11,56[$

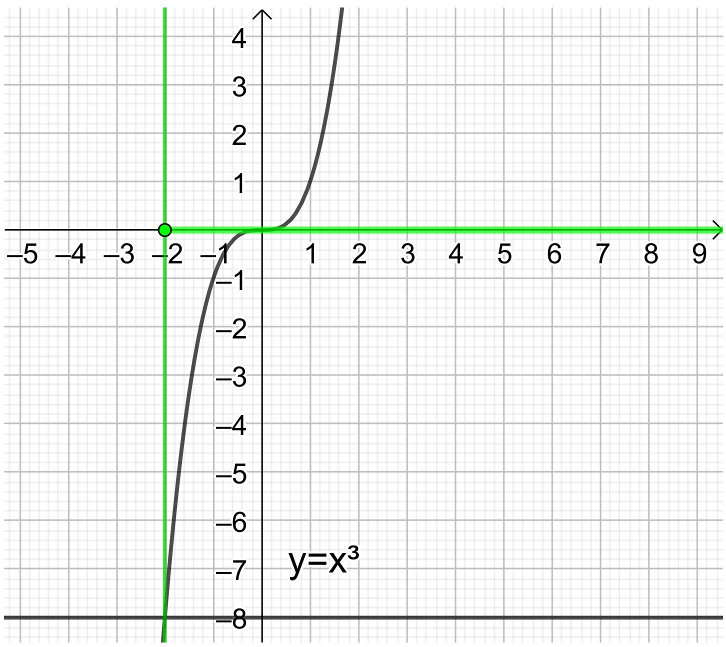
(h)



$\sqrt{x} \geq -1$
Sur le graphique,
c'est toujours vrai.
Attention au domaine
$x \geq 0$
$S = [0;+\infty[$

$\sqrt{x} \geq -1$
Impossible d'élever au carré
car les deux membres n'ont pas le même signe.
L'inéquation est toujours vraie.
Attention au domaine
$x \geq 0$
$S = [0;+\infty[$

(i)



$x^3 \geq -8$

La fonction est strictement croissante.

A partir du point $(-2; -8)$ on obtient

donc $x \geq -2$

$S = [-2; +\infty[$

$x^3 \geq -8$

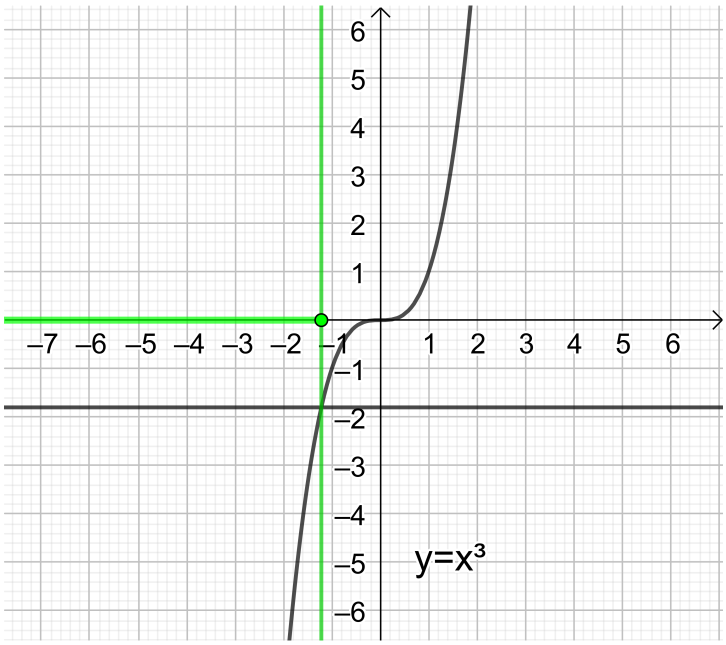
La fonction est strictement croissante et chaque nombre possède une racine cubique.

$x \geq \sqrt[3]{-8}$

$x \geq -2$

$S = [-2; +\infty[$

(j)



$x^3 \leq -1,8$

La fonction est strictement croissante.

A partir du point $(\sqrt[3]{-1,8}; -8)$ on obtient

donc $x \leq \sqrt[3]{-1,8}$

$S =]-\infty; -\sqrt[3]{1,8}]$

$x^3 \leq -1,8$

La fonction est strictement croissante et chaque nombre possède une racine cubique.

$x \leq \sqrt[3]{-1,8}$

$S =]-\infty; -\sqrt[3]{1,8}]$

3. Résous à l'aide d'un tableau de signe.

(a) $(x+2).(7-3x) \leq 0$

x		-2		$\frac{7}{3}$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$7-3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+2).(7-3x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Réponse : $x \leq -2$ ou $x \geq \frac{7}{3}$

$S =]-\infty; -2] \cup [\frac{7}{3}; +\infty[$

(b) $x^2.(2x+3) \geq 0$

x		$-\frac{3}{2}$		0	
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2.(2x+3)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Réponse : $x \geq -\frac{3}{2}$

$S = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

(c) $\dfrac{4x+7}{3x+2} < 0$

x		$-\frac{7}{4}$		$-\frac{2}{3}$	
$4x+7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{4x+7}{3x+2}$	$+$	0	$-$	0	$+$

Réponse : $-\frac{7}{4} < x < -\frac{2}{3}$

$S = \left]-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right[$

(d) $\dfrac{7-3x}{2x+1} \leq 2$

$\dfrac{7-3x}{2x+1} - 2 \leq 0$

$\dfrac{-7x+5}{2x+1} \leq 0$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{7}$	
$-7x+5$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-7x+5}{2x+1}$	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$

Réponse : $x < -\frac{1}{2}$ **ou** $x \geq \frac{5}{7}$

$S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{5}{7}; +\infty\right[$

(e) $\dfrac{4x+7}{x^3} < 0$

x		$-\frac{7}{4}$		0	
$4x+7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{4x+7}{x^3}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

$-\frac{7}{4} < x < 0$

$S = \left]-\frac{7}{4}; 0\right[$

(f) $\dfrac{4x+7}{3x+2} + 3 \geq 0$

$\dfrac{13x+13}{3x+2} \geq 0$

x		-1		$-\frac{2}{3}$	
$13x+13$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{13x+3}{3x+2}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

Réponse : $x \leq -1$ ou $x > -\frac{2}{3}$

$S =]-\infty; -1] \cup \left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$

(g) $\frac{4x+7}{2x+2} - 2 < 0$

$\frac{3}{2x+2} < 0$

x		-1	
3	$+$	$+$	$+$
$2x+2$	$-$	0	$+$
$\frac{3}{2x+2}$	$-$	$\vert$	$+$

$x < -1$

$S =]-\infty; -1[$

2.4 Relation de réciprocité

A retenir

Les fonction $f(x) = x^3$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$ sont réciproques l'une de l'autre, car dans leurs graphes, x et y sont permutés.

Les fonction $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ ne sont pas réciproques l'une de l'autre, car il manque $g_2(x) = -\sqrt{x}$. g et g_2 définissent ensemble une relation qui n'est pas une fonction.

2.5 Transformées des fonctions de référence

A retenir

A partir de f, construire	Transformation des coordonnées	Graphiquement
$h(x) = -f(x)$	$(x;y) \to (x;-y)$	symétrie d'axe Ox
$i(x) = f(-x)$	$(x;y) \to (-x;y)$	symétrie d'axe Oy
$j(x) = f(x) + p$	$(x;y) \to (x;y+p)$	translation verticale de p unités
$k(x) = f(x+p)$	$(x;y) \to (x-p;y)$	translation horizontale de $-p$ unités
$l(x) = p.f(x)$	$(x;y) \to (x;p.y)$	déformation verticale de coefficient p
$m(x) = f(p.x)$	$(x;y) \to \left(\dfrac{x}{p};y\right)$	déformation horizontale de coefficient $\dfrac{1}{p}$

Remarque

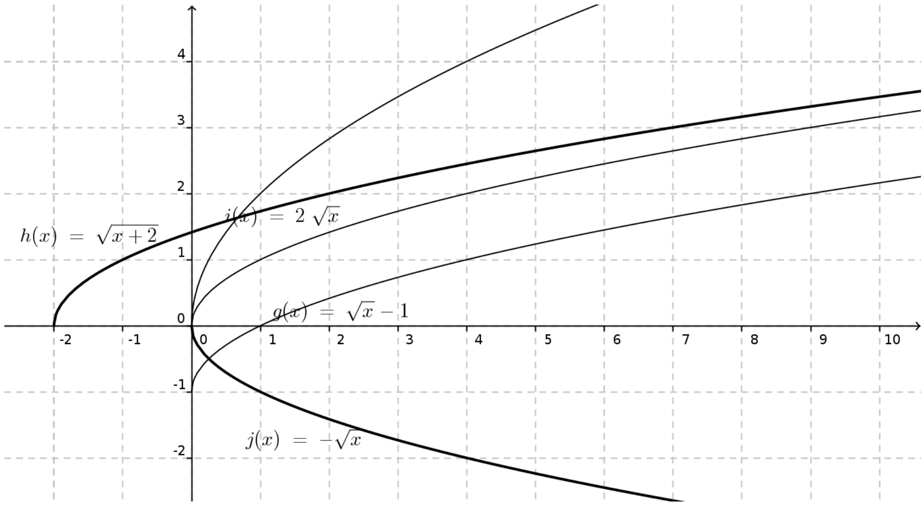
Pour les déformations, si le coefficient de la déformation est supérieur à 1, on parle d'étirement. Si ce coefficient est compris entre 0 et 1, on parle alors de contraction ou de compression.

Réponse aux exercices

1. Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, exprime avec $f(x)$:
   (a) $g(x) = f(x) + 2$
   (b) $h(x) = f(x-1)$
   (c) $i(x) = -f(2x)$
   (d) $j(x) = 5.f(x) - 3$
2. A partir de la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{x}$, construis le graphe cartésien des fonctions suivantes. Précise dans chaque cas la transformation effectuée.

2

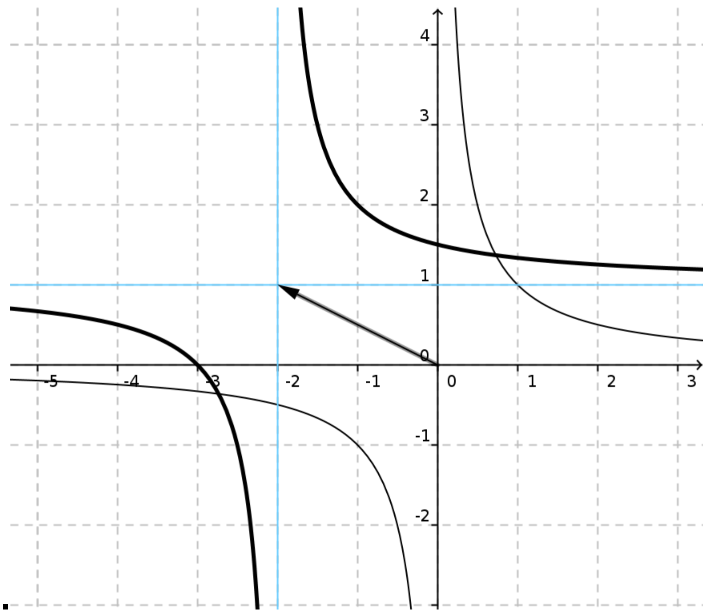
1) $g\left(x\right) = \sqrt{x} - 1$
Translation verticale de -1 unité
2) $h\left(x\right) = \sqrt{x+2}$
Translation horizontale de -2 unités
3) $i\left(x\right) = 2.\sqrt{x}$
Déformation verticale de coefficient 2
4) $j\left(x\right) = -\sqrt{x}$
Symétrie d'axe Ox



3. En partant de $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$

(a) cite les transformations (du plan et des coordonnées) qui permettent de passer au graphe de $g\left(x\right) = \dfrac{1}{x+2} + 1$.
$g\left(x\right) = f\left(x+2\right) + 1$
Translation horizontale de -2 unités composée à une translation verticale de 1 unité.
$\left(x; y\right) \rightarrow \left(x-2; y+1\right)$

(b) Trace les deux fonctions.



4. Chacune des fonctions suivantes a un graphe cartésien qui est obtenu en transformant celui d'une fonction de référence.

(c) Retrouve la fonction de référence dont est issu le graphe

(d) Précise la transformation qui a permis de l'obtenir.

(e) Trouve la formule de la fonction dessinée.

Graphe	Fonction de référence	Transformation	Expression
a	$f(x) = x^2$	Translation verticale de -4 unités $(x; y) \to (x; y-4)$	$a(x) = x^2 - 4$
b	$f(x) = \sqrt{x}$	Symétrie axiale d'axe Ox $(x; y) \to (x; -y)$	$b(x) = -\sqrt{x}$
c	$f(x) = \sqrt{x}$	Symétrie axiale d'axe x suivie d'une symétrie axiale d'axe Oy $(x; y) \to (-x; -y)$	$c(x) = -\sqrt{-x}$
d	$f(x) = \|x\|$	Translation verticale de -1 unité	$d(x) = \|x\| - 1$
e	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	Translation horizontale de 1 unité $(x; y) \to (x+1; y)$	$e(x) = \dfrac{1}{x-1}$
f	$f(x) = x^2$	Translation horizontale de -2 unités $(x; y) \to (x-2; y)$	$f(x) = (x+2)^2$
g	$f(x) = \|x\|$	Translation horizontale de 1 unité $(x; y) \to (x+1; y)$	$g(x) = \|x-1\|$
h	$f(x) = x^2$	Translation horizontale de -2 unités suivie d'une translation verticale de -1 unité $(x; y) \to (x-2; y-1)$	$h(x) = (x+2)^2 - 1$
i	$f(x) = x^2$	Translation horizontale de -1 unité suivie d'une symétrie d'axe Ox et enfin une translation verticale de 1 unité $(x; y) \to (x-1; y+1)$	$i(x) = -(x+1)^2 + 1$
j	$f(x) = \sqrt{x}$	Symétrie axiale d'axe Oy $(x; y) \to (-x; y)$	$j(x) = \sqrt{-x}$
k	$f(x) = x^3$	Translation horizontale de -1 unité suivie d'une translation verticale de -1 unité $(x; y) \to (x-1; y-1)$	$k(x) = (x+1)^3 - 1$

5. Partant de $f(x) = x^2$, écris :

   (a) $4.f(x) = 4.x^2$
   (b) $f(-x) = (-x)^2 = x^2$
   (c) $f(x+7) = (x+7)^2$
   (d) $f(x-2) = (x-2)^2$
   (e) $f(x) - 1 = x^2 - 1$
   (f) $-f(x) = -x^2$
   (g) f$(2x) = 4x^2$

2

6. Cite les transformations du plan et des coordonnées.

Expression	Transformation	Transformation des coordonnées
a) $g(x) = f(x) + 5$	Translation verticale de 5 unités	$(x;y) \to (x;y+5)$
b) $g(x) = 5.f(x)$	Déformation verticale (étirement) de coefficient 5	$(x;y) \to (x;5y)$
c) $g(x) = f(x-3)$	Translation horizontale de 3 unités	$(x;y) \to (x+3;y)$
d) $g(x) = f(x+1) + 2$	Translation horizontale de -1 unité suivie d'une translation verticale de 2 unités	$(x;y) \to (x-1;y+2)$
e) $g(x) = -f(x)$	Symétrie d'axe x	$(x;y) \to (x;-y)$
f) $g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$	Déformation horizontale (étirement) de coefficient 3	$(x;y) \to (3x;y)$
g) $g(x) = \frac{1}{7}.f(x)$	Déformation verticale (compression) de coefficient 7	$(x;y) \to (x;\frac{y}{7})$
h) $g(x) = -f(2x) + 3$	Déformation horizontale (compression) de coefficient 1/2 suivie d'une symétrie d'axe x puis d'une translation verticale de 3 unités	$(x;y) \to (\frac{x}{2};-y+3)$

Exercice supplémentaire

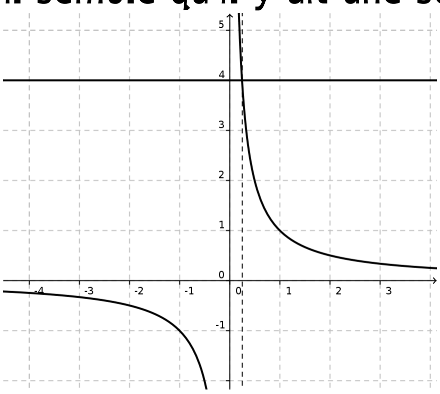
Équations liées aux fonctions de référence

Dans les équations suivantes, le membre de gauche est une fonction de référence ou une transformée de fonction de référence. Représente-la puis résous algébriquement et graphiquement l'équation (précision : 5 décimales).

1. $\dfrac{1}{x} = 4$
2. $\dfrac{2}{x-3} = 5$
3. $x^3 = -5$
4. $x^3 = \dfrac{1}{4}$
5. $(x+2)^3 = 3$
6. $|x| = \dfrac{7}{4}$
7. $2\,|x+5| = 3$
8. $\sqrt{x} = \dfrac{7}{4}$
9. $\sqrt{2-x} = \dfrac{5}{2}$
10. $\sqrt[3]{x} = \dfrac{3}{2}$
11. $\sqrt[3]{x-3} = -\dfrac{3}{2}$
12. $x^2 = 5$
13. $x^2 = -3$
14. $x^2 = 0$
15. $(2x-4)^2 = 5$

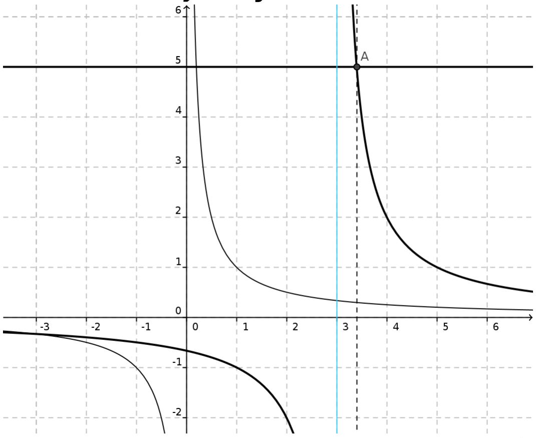
Réponses

1. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 0,3$



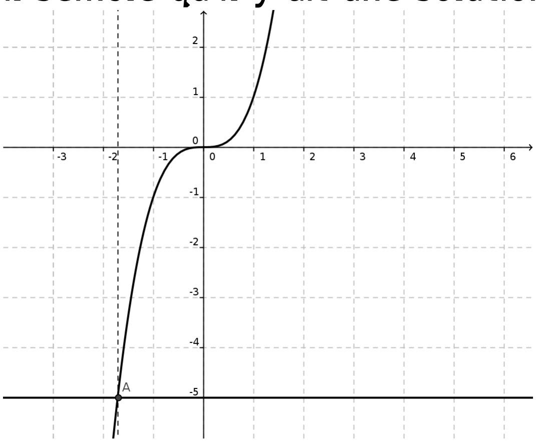
$\dfrac{1}{x} = 4 \Longrightarrow 1 = 4.x \Longrightarrow x = \dfrac{1}{4} \qquad S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

2. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 3,3$



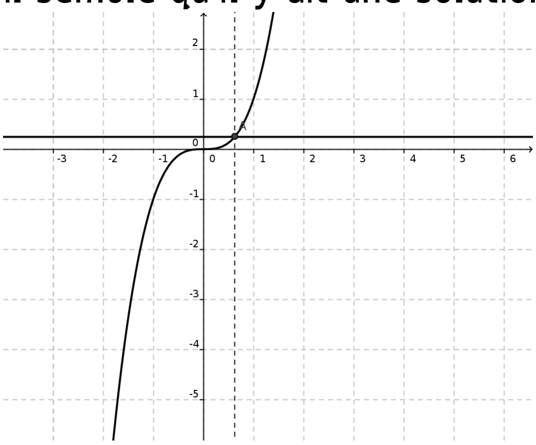
$\dfrac{2}{x-3} = 5 \Longrightarrow 2 = 5x - 15 \Longrightarrow x = \dfrac{17}{5}$ $\qquad S = \{3,4\}$

3. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong -1,7$



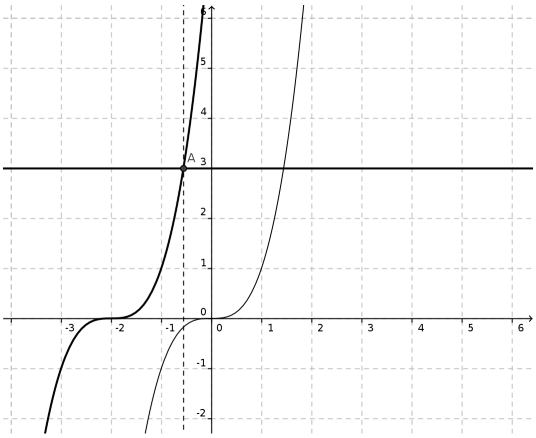
$x^3 = -5 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{-5}$ $\qquad S = \{-1,70998\}$

4. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 0,6$



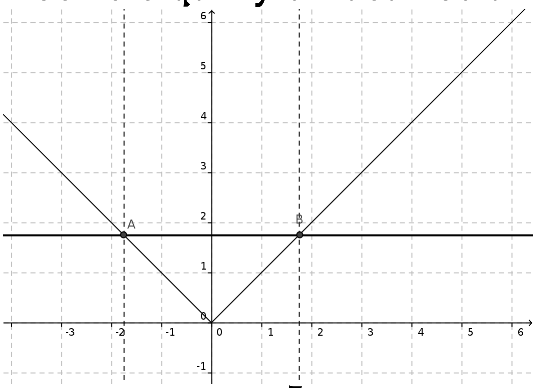
$x^3 = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ $\qquad S = \{0,62996\}$

5. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong -0,6$



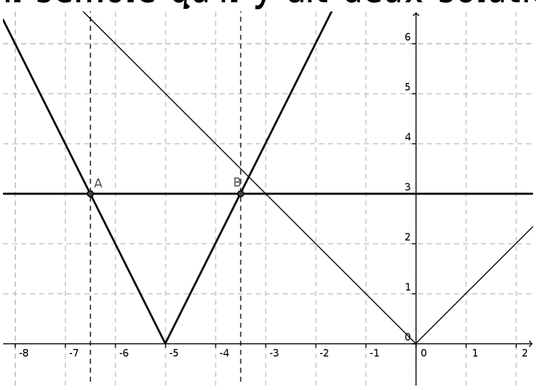
$(x+2)^3 = 3 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{3} - 2 \qquad S = \{-0,55775\}$

6. Il semble qu'il y ait deux solutions $x \cong \pm 1,7$



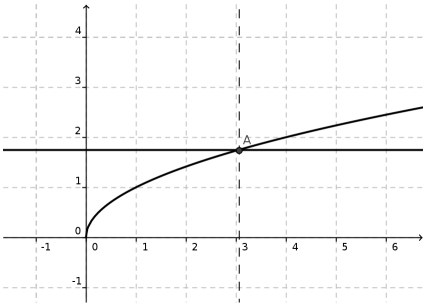
$$|x| = \frac{7}{4} \Longrightarrow \begin{array}{c} x = \frac{7}{4} \ (x \geq 0) \\ ou \ -x = \frac{7}{4} \ (x \leq 0) \end{array} \qquad S = \left\{-\frac{7}{4}; \frac{7}{4}\right\}$$

7. Il semble qu'il y ait deux solutions $x \cong -6,6$ et $x \cong -3,6$



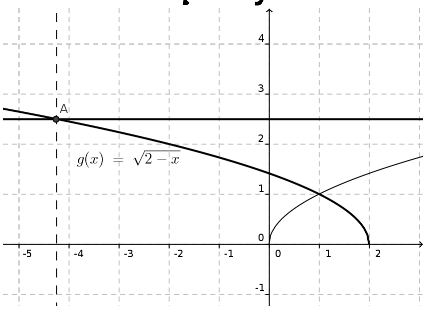
$$2\,|x+5| = 3 \Longrightarrow \ |x+5| = \frac{3}{2} \ \Longrightarrow \begin{array}{c} x+5 = \frac{3}{2} \ (x+5 \geq 0) \\ ou \ -(x+5) = \frac{3}{2} \ (x+5 \leq 0) \end{array} \qquad S = \left\{-\frac{7}{2}; -\frac{13}{2}\right\}$$

8. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 3,1$



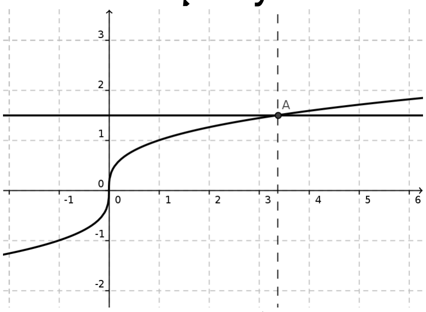
$\sqrt{x} = \dfrac{7}{4} \Longrightarrow x = \dfrac{49}{16}$ $\qquad S = \{3,0625\}$

9. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong -4,3$



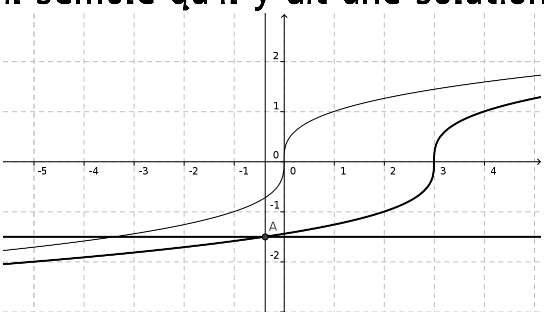
$\sqrt{2-x} = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow 2 - x = \dfrac{25}{4} \Longrightarrow x = -\dfrac{17}{4}$ $\qquad S = \{-4,25\}$

10. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong 3,4$



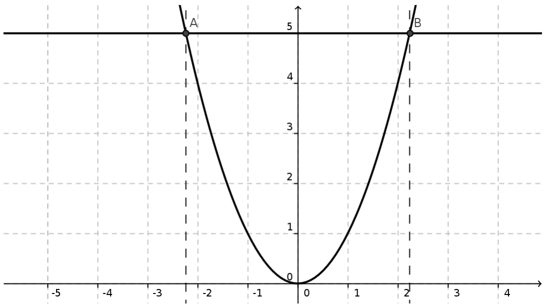
$\sqrt[3]{x} = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{27}{8}$ $\qquad S = \{3,375\}$

11. Il semble qu'il y ait une solution $x \cong -0,4$



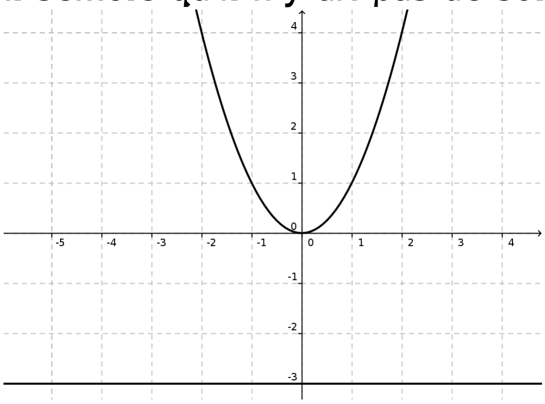
$\sqrt[3]{x-3} = -\dfrac{3}{2} \Longrightarrow x - 3 = -\dfrac{27}{8} \Longrightarrow x = -\dfrac{3}{8}$ $\qquad S = \{-0,375\}$

12. Il semble qu'il y ait deux solutions $x \cong -2,3$ et $x \cong 2,3$



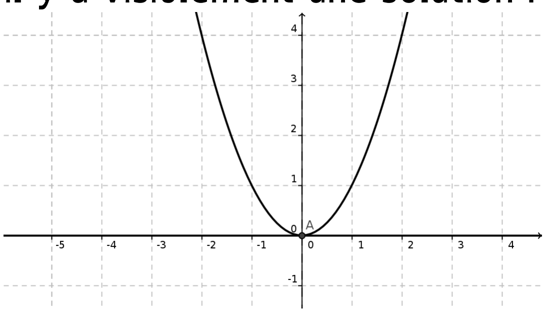
$x^2 = 5 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ $\qquad S = \{-2,23607; 2,23607\}$

13. Il semble qu'il n'y ait pas de solution.



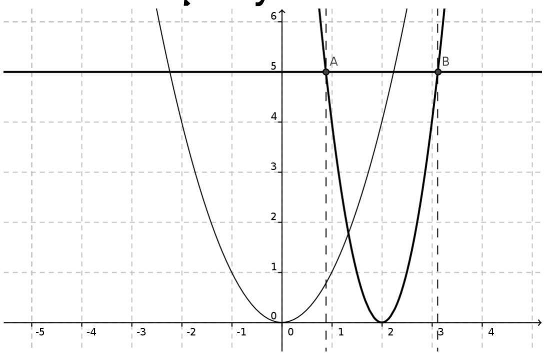
$x^2 = -3$ est impossible car $x^2 \geq 0$ $\qquad S = \emptyset$

14. Il y a visiblement une solution : $x = 0$



$x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ $\qquad S = \{0\}$

15. Il semble qu'il y ait deux solutions $x \cong 0,8$ et $x \cong 3,2$



$$(2x-4)^2 = 5 \Longrightarrow \begin{array}{c} 2x-4 = \sqrt{5} \\ ou\, 2x-4 = -\sqrt{5} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} x = \dfrac{4+\sqrt{5}}{2} \\ ou\, x = \dfrac{4-\sqrt{5}}{2} \end{array} \qquad S = \{0,88197; 3,11803\}$$

2.6 Transformées de x²

A retenir

1. Le passage de $f(x) = x^2$ à $g(x) = a(x+m)^2$ se caractérise par

une translation horizontale de -m unités
suivie d'une déformation verticale de coefficient $|a|$;
si a est négatif, la déformation est composée
avec une symétrie d'axe horizontal.
$(x; y) \to (x - m; ay)$

2. La courbe obtenue s'appelle une parabole.

3. L'axe de symétrie, axe des ordonnées (y) pour la fonction x^2,

devient la droite verticale d'équation $x = -m$.

Réponse aux exercices

Première série

1. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = (x+2)^2$.

   (a) Pour t'aider, remplis le tableau suivant.

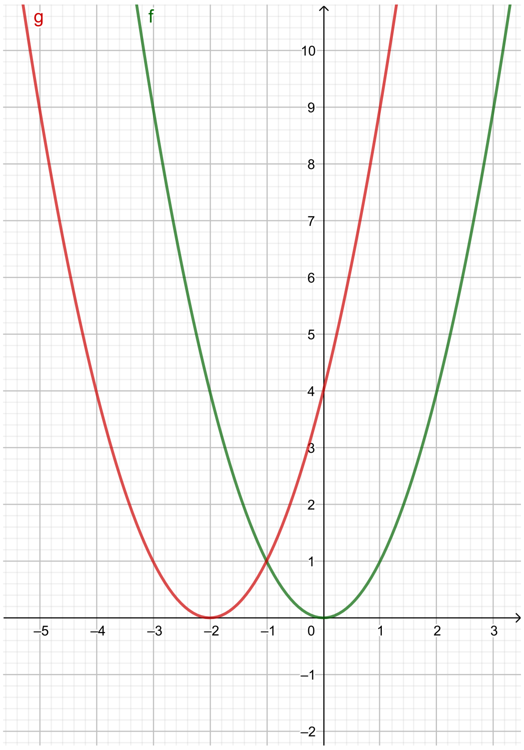
   J'ai déjà complété une ligne.

x	x+2	$(x+2)^2$
		0
0	2	4
		9

   Ainsi, pour arriver à 4, il faut partir de 0 et pas de 2.

   Translation horizontale de -2 unités.

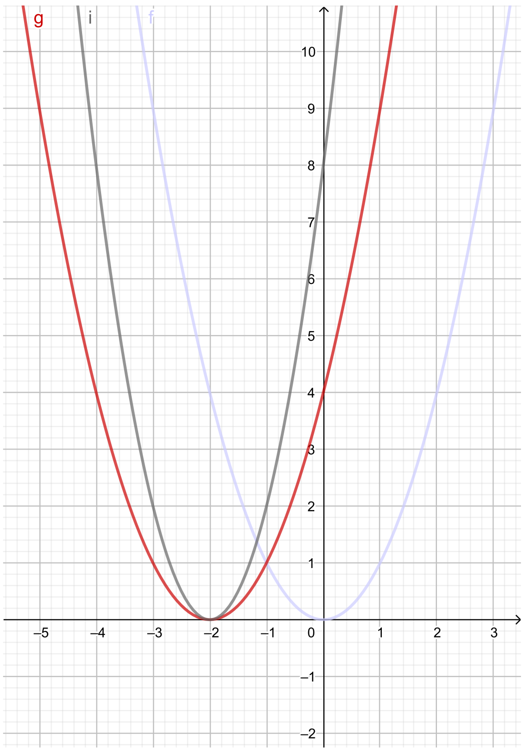
   (b) $(x; y) \to (x - 2; y)$

(c) 

2. Partant de $g(x) = (x+2)^2$, passe à i tel que $i(x) = 2(x+2)^2$.

   (a) Déformation verticale de coefficient 2 (dilatation).

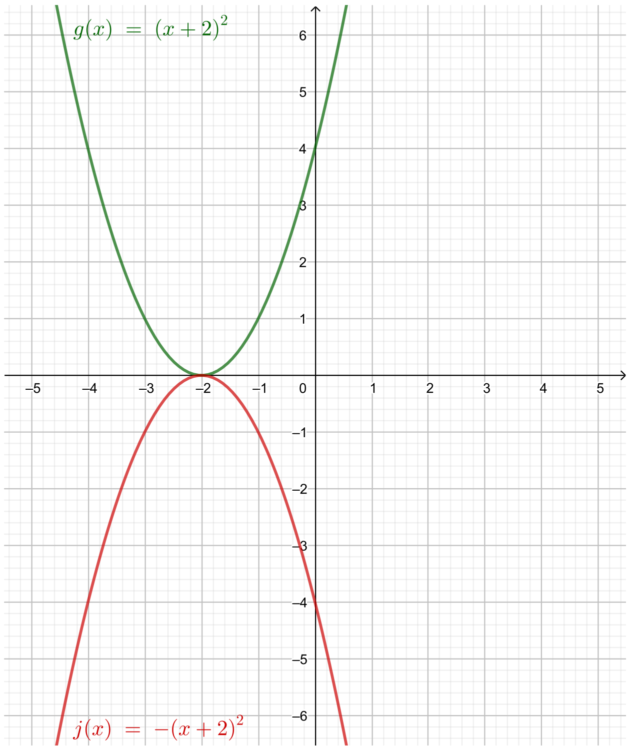
   (b) $(x; y) \to (x; 2y)$

(c) 

3. Partant de $g(x) = (x+2)^2$, passe à j tel que $j(x) = -(x+2)^2$.

   (a) Symétrie d'axe horizontal.

   (b) $(x; y) \to (x; -y)$

(c) 

4. Partant de $f(x) = x^2$, passe à h tel que $h(x) = (x-3)^2$.

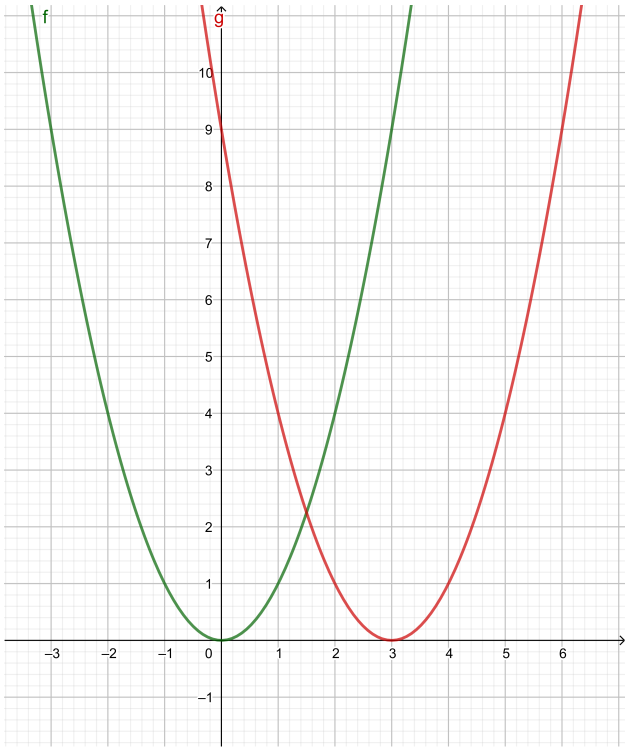
(a) Pour t'aider, remplis le tableau suivant.

x	x-3	$(x-3)^2$
		0
5	2	4
		9

Ainsi, pour arriver à 4, il faut partir de 5 et pas de 2.

Translation horizontale de 3 unités.

(b) $(x;y) \to (x+3;y)$

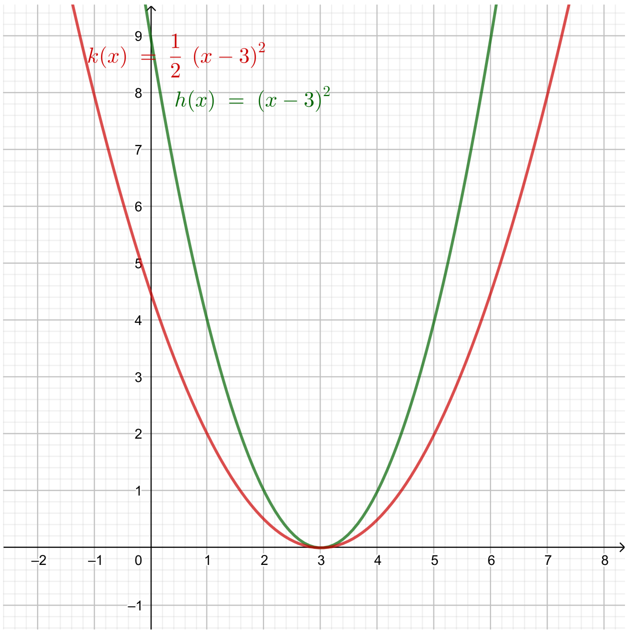


(c)

5. Partant de $h(x) = (x-3)^2$, passe à k tel que $k(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$.

   (a) Déformation verticale de coefficient $\frac{1}{2}$ (contraction)

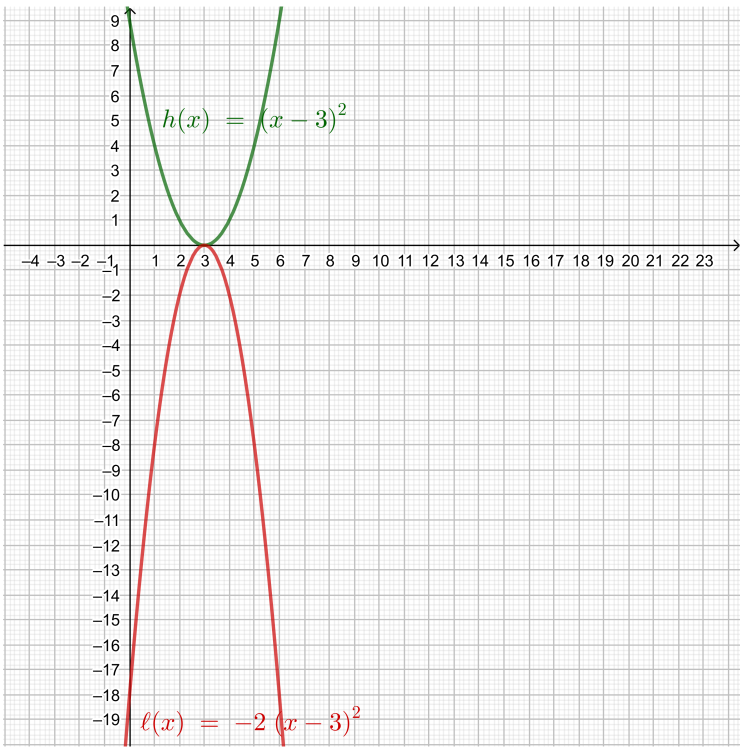
   (b) $(x;y) \to \left(x; \frac{1}{2}y\right)$

   (c) 

6. Partant de $h(x) = (x-3)^2$, passe à l tel que $l(x) = -2(x-3)^2$.

   (a) Symétrie d'axe horizontal et déformation verticale de coefficient 2 (dilatation)

   (b) $(x;y) \to (x; -2y)$

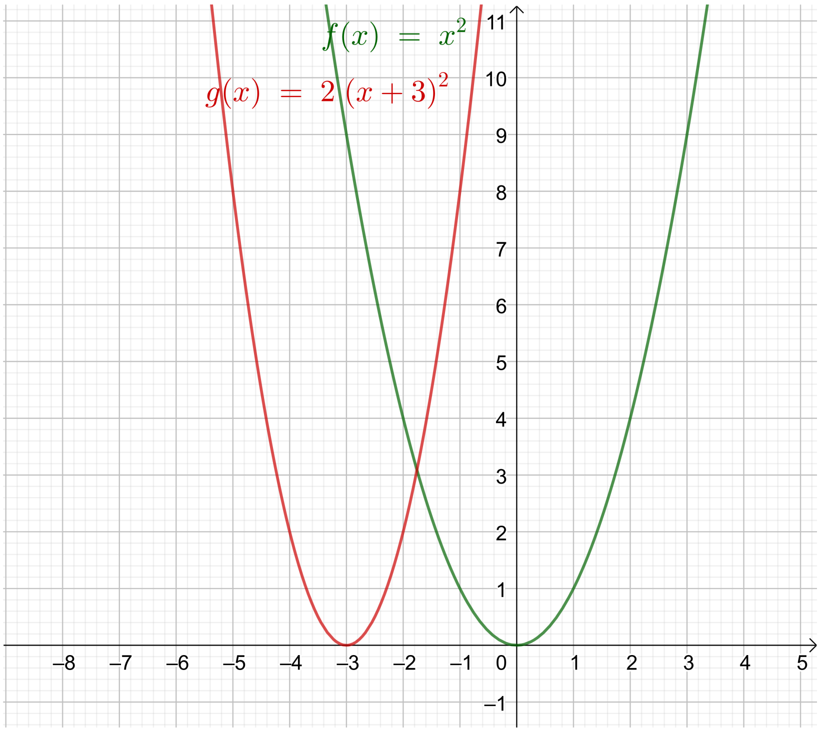
   (c) 

Deuxième série

7. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = 2(x+3)^2$.

   (a) Une translation horizontale de -3 unités suivie d'une dilatation verticale de coefficient 2.

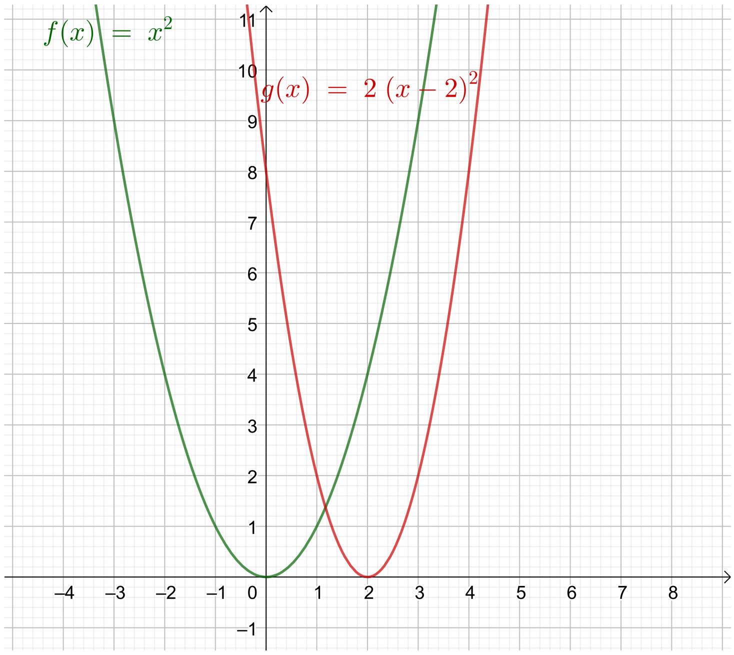
   (b) $(x; y) \to (x-3; 2y)$

   (c) 

8. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = 2(x-2)^2$.

   (a) Une translation horizontale de 2 unités suivie d'une dilatation verticale de coefficient 2.

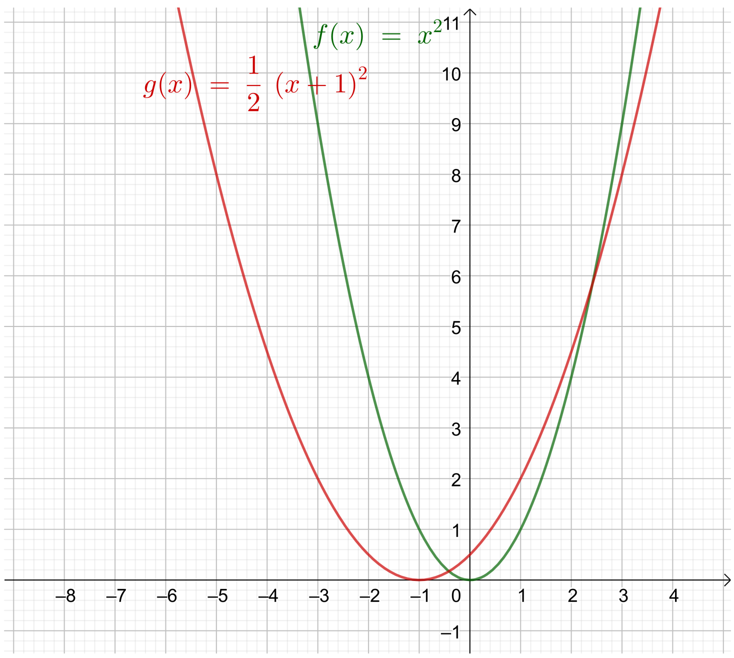
   (b) $(x;y) \to (x+2;2y)$

   (c) 

9. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$.

   (a) Une translation horizontale de -1 unité suivie d'une contraction verticale de coefficient $\frac{1}{2}$.

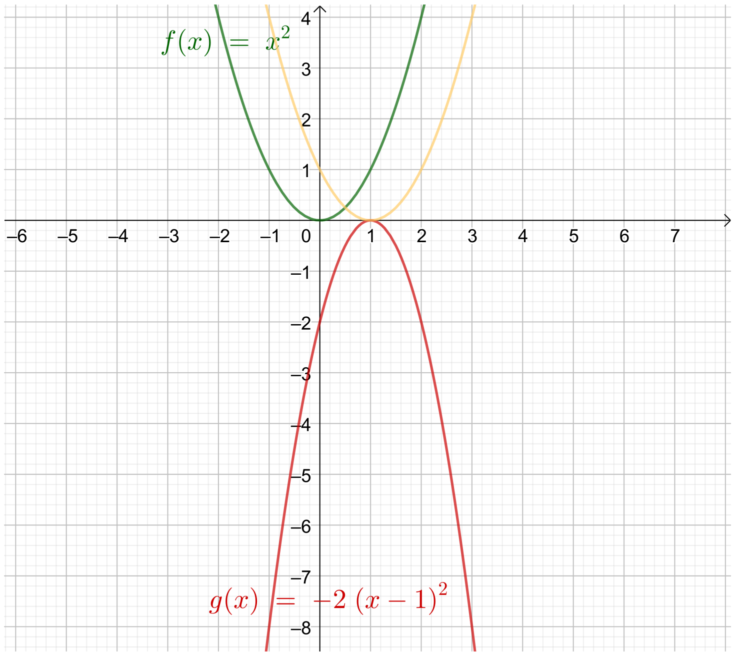
   (b) $(x;y) \to \left(x-1;\frac{1}{2}y\right)$

   (c) 

10. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = -2(x-1)^2$.

    (a) Une translation horizontale de 1 unité suivie d'une dilatation verticale de coefficient 2 et d'une symétrie d'axe horizontal.

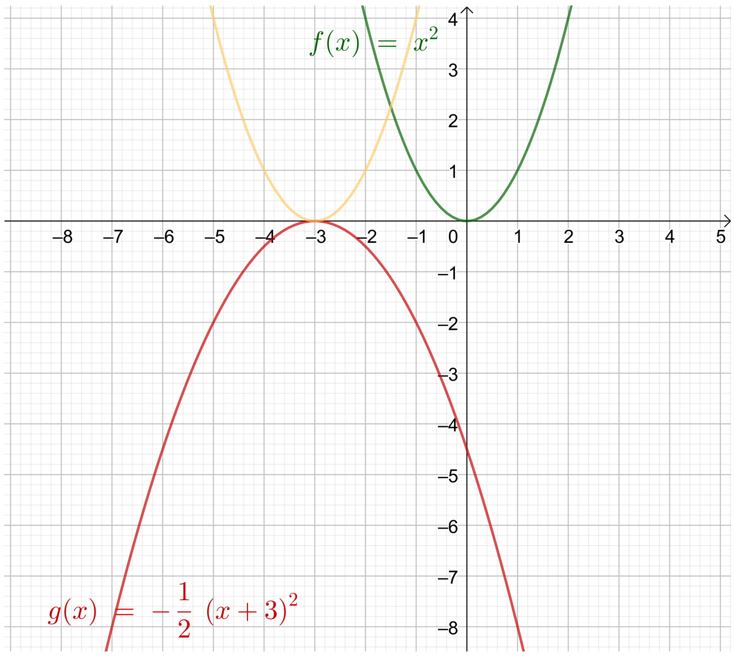
    (b) $(x; y) \to (x+1; -2y)$

    (c) 

11. Partant de $f(x) = x^2$, passe à g tel que $g(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2$.

    (a) Une translation horizontale de -3 unités suivie d'une contraction verticale de coefficient $\frac{1}{2}$ et d'une symétrie d'axe horizontal.

    (b) $(x; y) \to \left(x-3; -\frac{1}{2}y\right)$

    (c) 

Chapitre 3

Statistique

3

3.1 Tableau brut - tableau ordonné

A retenir

Définitions

• La statistique est la science qui a pour objet les ensembles étendus de mesures de même nature.

• La population est l'ensemble des éléments auxquels se rapporte la mesure.

• L'échantillon est l'ensemble des éléments dont on connaît la mesure.

• Un individu est un élément de la population.

• Le caractère est l'aspect de la population que l'on étudie, que l'on mesure.

• Un caractère est quantitatif lorsque ses modalités s'expriment par des nombres qui peuvent être ordonnés.

• Un caractère est qualitatif lorsqu'il n'est pas quantitatif.

• Les modalités d'un caractère sont les différentes valeurs que prend le caractère.

• L'effectif n_i d'une modalité (ou d'une classe de modalités) est le nombre d'individus ayant cette modalité (ou dont la modalité appartient à cette classe).

Exemples de caractère quantitatif

Cote d'interrogation, âge, taille, masse, nombre de buts marqués, diamètre des clous, nombre d'enfants d'une famille, distance entre le domicile et l'école, ...

Exemples de caractère qualitatif

Nationalité (belge, marocain, italien, ...), couleur des yeux (bleu, vert, brun, ...), marque de voiture (Audi, Peugeot, Toyota, ...), niveau de satisfaction des clients pour un produit (médiocre, passable, bien, ...), type de délit (mineur, assez grave, grave, ...), ...

• Lorsque le nombre de modalités est largement supérieur à 10, on les regroupe en classes, de sorte que chaque modalité se trouve dans une et une seule classe.

Tableau ordonné

Un tableau ordonné comprend 5 colonnes.

1. La première colonne reprendra les modalités x_i ou les classes de modalités suivies de leurs centres c_i (6 colonnes dans ce cas).
2. La deuxième colonne contiendra les effectifs n_i.
3. La troisième colonne contiendra les fréquences f_i. $f_i = \dfrac{n_i}{n}$, où n est l'effectif total.
4. La quatrième colonne contiendra les effectifs cumulés $N_i = n_1 + n_2 + ... + n_i$.
5. La cinquième colonne contiendra les fréquences cumulées $F_i = \dfrac{N_i}{n}$.

Réponse aux exercices

1. Cotes d'un contrôle

Population : les élèves de $5^{ème}$.
Individu : un élève de $5^{ème}$
Échantillon : les élèves de $5^{ème}$ qui ont présenté le test
Caractère : la cote obtenue
Type de caractère : quantitatif
Modalités : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Effectifs cumulés N_i	Fréquences cumulées F_i
1	3	$2,68$%	3	$2,68$%
2	6	$5,36$%	9	$8,04$%
3	7	$6,25$%	16	$14,29$%
4	19	$16,96$%	35	$31,25$%
5	18	$16,07$%	53	$47,32$%
6	21	$18,75$%	74	$66,07$%
7	16	$14,29$%	90	$80,36$%
8	13	$11,61$%	103	$91,96$%
9	6	$5,36$%	109	$97,32$%
10	3	$2,68$%	112	100%
	$n =$112	Total :		

$n_6 = 21$ $f_3 = 6,25$% $N_9 = 109$ $F_6 = 66,07$%

2. Taille des jeunes

Population : les jeunes de 15 à 20ans

Individu : un des 657 jeunes interrogés

Échantillon : 657 jeunes de 15 à 20 ans dont la taille est connue

Caractère : la taille (cm)

Type de caractère : quantitatif

Modalités : 151, 152, 153, ..., 190

Classes C_i	Centre c_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Effectifs cumulés N_i	Fréquences cumulées F_i
$]150;155]$	153	29	$4,41$%	29	$4,41$%
$]155;160]$	158	51	$7,76$%	80	$12,18$%
$]160;165]$	163	102	$15,53$%	182	$27,70$%
$]165;170]$	168	192	$29,22$%	374	$56,93$%
$]170;175]$	173	160	$24,35$%	534	$81,28$%
$]175;180]$	178	73	$11,11$%	607	$93,39$%
$]180;185]$	183	32	$4,87$%	639	$97,26$%
$]185;190]$	188	18	$2,74$%	657	100%
	Somme :	$n = 657$			

$C_6 =]175;180]$ $c_3 = 163$ $f_8 = 2,74$% $F_1 = 4,41$%

3

3.2 Diagrammes et graphiques

A retenir

Les modalités sont toujours sur l’axe horizontal (x).

Un polygone (une ligne polygonale) est formée de segments de droites bouts-à bouts (les sommets).

Un histogramme est formé de rectangles : de loin, on dirait une rue de gratte-ciels.

Un graphique en bâtonnets est formé de... bâtonnets, pas de rectangles.

Réponse aux exercices

1. Cotes d’un test

Diagramme en bâtonnets

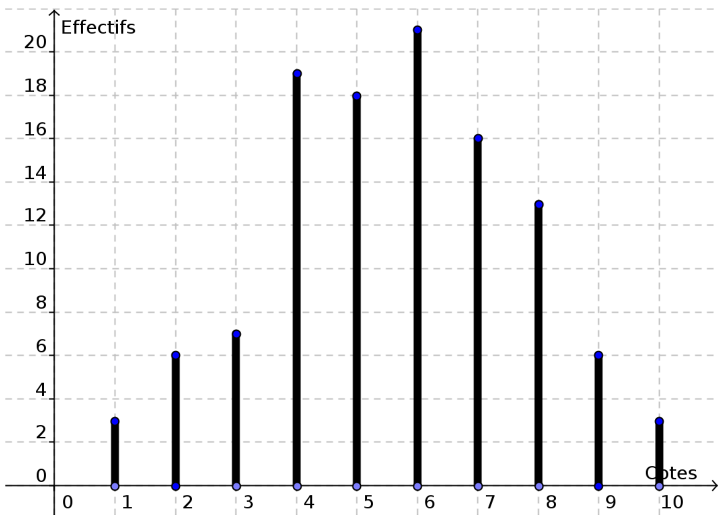
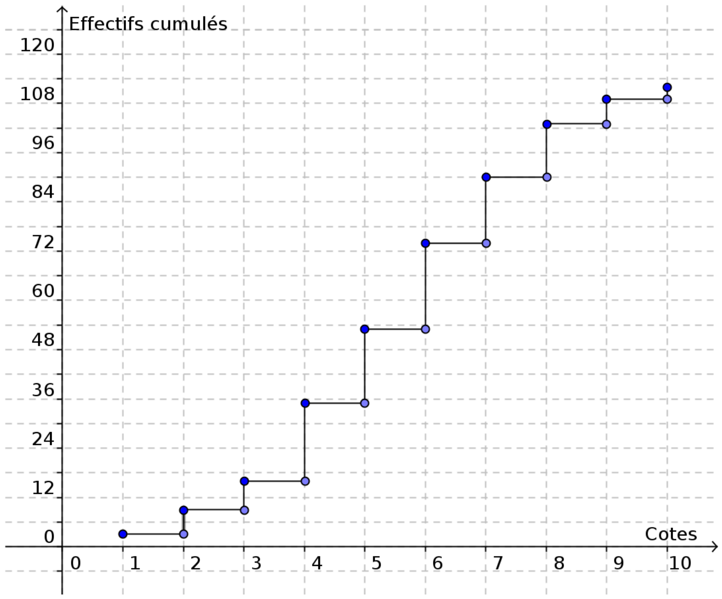
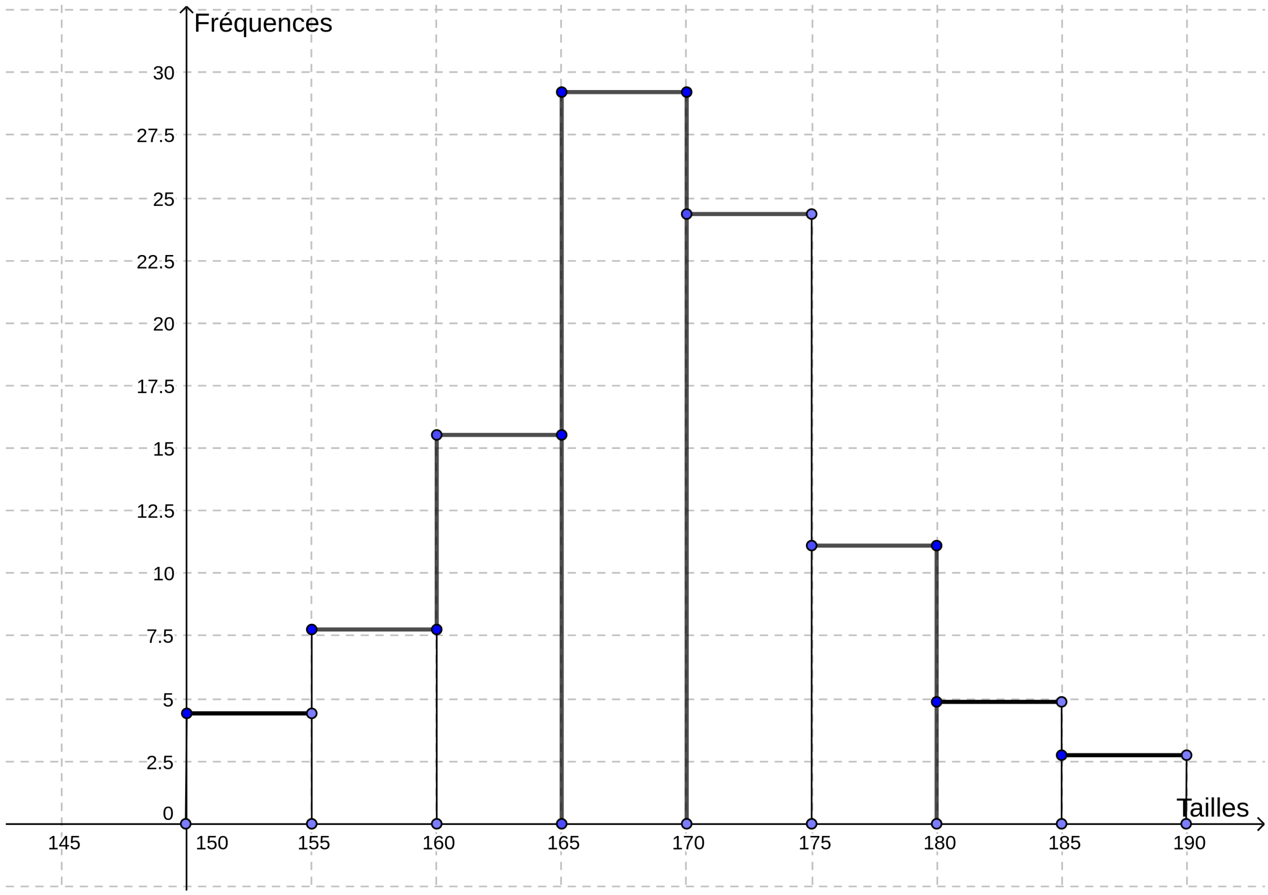


Diagramme en escalier

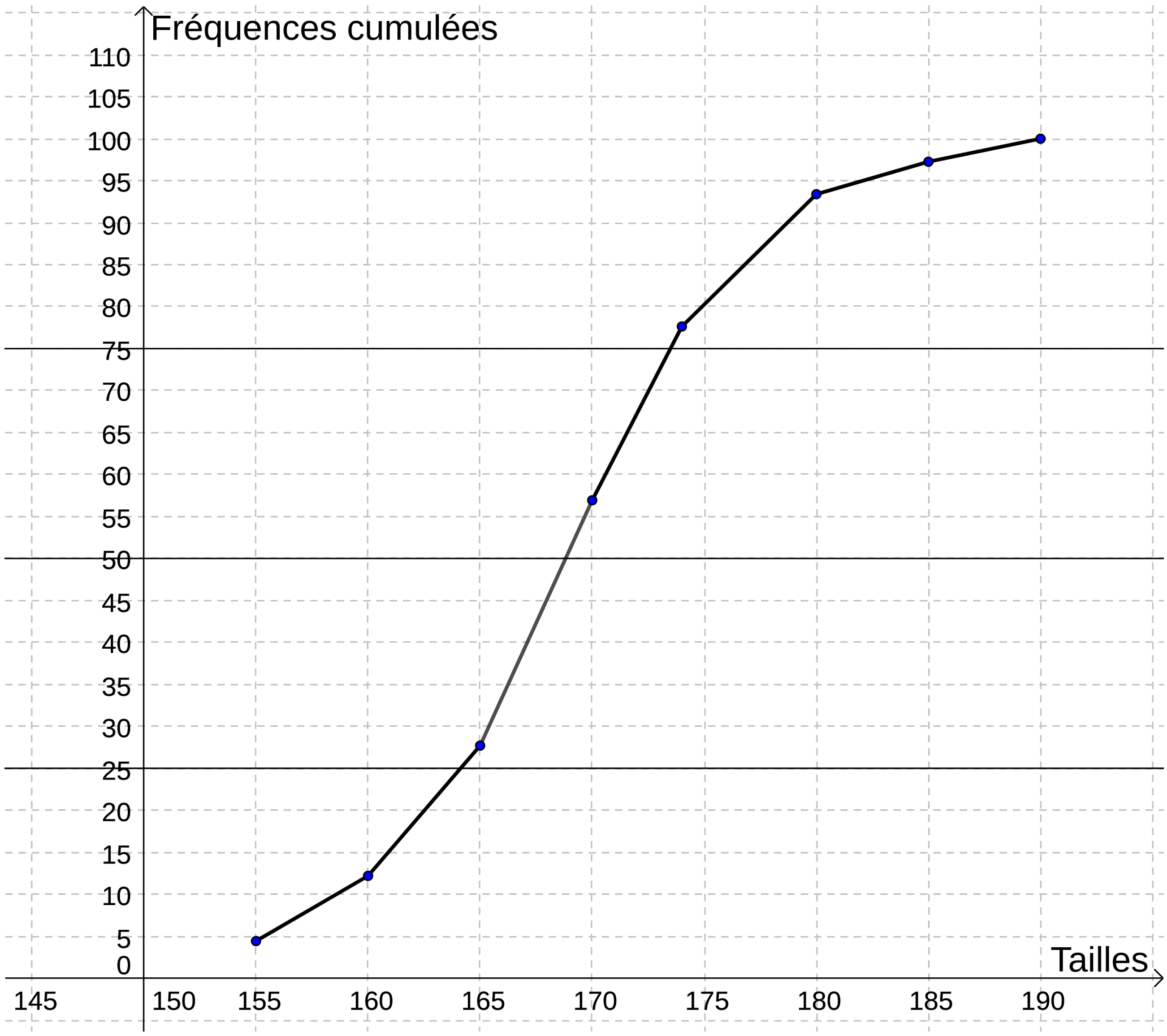


2. Taille des jeunes

Histogramme



Polygone



3.3 Indicateurs de position

A retenir

Définitions

• Le mode est la modalité auquel correspond l'effectif (ou la fréquence) le (la) plus élevé(e). Lorsque les modalités sont regroupées en classes, on utilise le centre de classe.

• La moyenne arithmétique $\overline{x}$ d'un caractère quantitatif est le quotient de la somme de tous les résultats obtenus par l'effectif total.

Si p est le nombre de modalités différentes, si n_1 est l'effectif de la modalité x_1 , n_2 celui de la modalité x_2 , ..., n_p celui de la modalité x_p et si n est l'effectif total, alors

$$\overline{x} = \frac{n_1.x_1 + n_2.x_2 + ... + n_p.x_p}{n}$$

Dans le cas d'un caractère quantitatif regroupé en classes, les x_i doivent être remplacés par les centres c_i des classes dans la formule ci-dessus.

• La médiane est la modalité telle que la moitié de la population ait une modalité inférieure.

Le caractère doit être quantitatif.

3

Réponse aux exercices

	mode	médiane	moyenne
Taille des élèves			
Colis postaux	1,75	1,77	1,78
Hauteur des meubles	100	99,6	100,16
Cote d'un contrôle	6	5,3	5,6
Taille des jeunes	168	168	169,4

3.4 Indicateurs de dispersion

A retenir

Définition

Un paramètre de dispersion précise comment sont réparties les mesures autour d'une valeur centrale.

A chaque indicateur de position est associé un indicateur de dispersion qui précise comment sont réparties les mesures autour de cette valeur centrale.

Indicateur de position	Indicateur de dispersion
Mode	Étendue
Moyenne	Écart-type
Médiane	Écart inter-quartile

Définitions

• L'étendue (E) d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite modalité.

Si des centres de classe ont été définis, ils peuvent être utilisés.

L'étendue est l'indicateur de dispersion associé au mode.

• La variance est définie par la formule

$$V = \frac{n_1.(x_1 - \overline{x})^2 + n_2.(x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_p.(x_p - \overline{x})^2}{n}$$

dans laquelle $\overline{x}$ est la moyenne, n l'effectif total, x_i le centre de la classe i et n_i son effectif.

• L'écart-type est défini par $\sigma = \sqrt{V}$.

L'écart-type est l'indicateur de dispersion associé à la moyenne.

• Les quartiles Q_1 et Q_3, parfois appelés $Q_{1/4}$ et $Q_{3/4}$ sont définis comme ceci.

Q_1 (ou $Q_{1/4}$) est la modalité telle que 25% des modalités lui soit inférieures.

Q_3 (ou $Q_{3/4}$) est la modalité telle que 75% des modalités lui soit inférieures.

• L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1$.

L'écart interquartile est l'indicateur de dispersion associé à la médiane.

Réponse aux exercices

	mode	étendue	médiane	écart inter-quartile	moyenne	écart-type
Taille des élèves						
Colis postaux	$1,75$	$0,8$	$1,77$	$0,21$	$1,78$	$0,177$
Hauteur des meubles	100	5	$99,6$	$1,4$	$100,16$	1
Cote d'un contrôle	6	9	$5,3$	3	$5,6$	$2,1$
Taille des jeunes	168	36	168	$9,5$	$169,4$	$7,7$

3.5 Inégalité de Tchebichev

A retenir

Théorème

L'effectif compris dans l'intervalle $[\overline{x} - k\sigma; \overline{x} + k\sigma]$ est supérieure à $1 - \dfrac{1}{k^2}$ de l'effectif total.

Réponse aux exercices

	$\overline{x}$	σ	$\overline{x} - 2\sigma$	$\overline{x} + 2\sigma$	effectif compris dans l'intervalle	n
Taille des élèves						
Colis postaux	$1,775$	$0,177$	$1,421$	$2,129$	39	40
Hauteur des meubles	$100,16$	1	$98,16$	$102,16$	98	100
Cote d'un contrôle	$5,6$	$2,1$	$1,4$	$9,8$	104	112
Taille des jeunes	$169,4$	$7,7$	154	$184,8$	609	657

Dans tous les cas, l'effectif compris dans l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$ est (nettement) supérieur à 75% de l'effectif total.

3.6 Calcul numérique

Réponses aux exercices

Précision des paramètres de position et de dispersion

Dans l'exemple 2 (taille des jeunes) nous avons obtenu une moyenne de 169,4 cm. Les modalités ont été remplacées par des centres de classe ; par exemple, 153 cm est le centre de la première classe, remplaçant les modalités 151 (2 fois), 152 (3 fois) 153 (6 fois) 154 (8 fois) et 155 (10 fois). Parmi les jeunes qui mesurent 154 cm, il y en a peut-être qui mesurent 154,2 cm ou 154,3 cm.

Tout cela pour en venir à ceci : le « 4 » de la deuxième décimale de la moyenne ne veut pas dire grand-chose. L'utilisation de logiciels tels qu'un tableur ou geogebra donne des réponses précises ; toutefois cette précision est limitée à la précision des données (modalités).

En ce qui concerne la calculette, lorsque les modalités sont regroupées en classes, la médiane et les quartiles ne sont que des approximations. La visualisation graphique reste plus précise et à privilégier...

Les réponses se trouvent à l'adresse

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/statistique

3.7 Séries chronologiques

A retenir

Définitions

• La variation absolue est la différence entre deux valeurs consécutives, $v_2 - v_1$.

Généralement, ce sera la valeur la plus récente (ou image du plus grand x) moins la plus vieille.

• La variation relative, ou taux de variation, noté t, est la variation absolue divisée par la première valeur (la plus vieille ou image du plus petit x).

$t = \dfrac{v_2 - v_1}{v_1}$

Propriétés

1. Le coefficient multiplicateur de la première valeur qui permet d'obtenir la seconde vaut $1 + t$.

   Démonstration

   Appelons les valeurs v_1 et v_2.

$t = \dfrac{v_2 - v_1}{v_1}$ par définition ; donc

$t.v_1 = v_2 - v_1$ par multiplication des deux membres par v_1 ;

$v_2 = v_1 + t.v_1$ et par mise en évidence,

$v_2 = (1+t)\,.v_1$ cqfd

2. Conséquence

$\dfrac{v_2}{v_1} = 1 + t$ où t est le taux de variation.

3. Le coefficient multiplicateur pour passer de la seconde valeur à la première est l'inverse du coefficient multiplicateur.

$1 + t' = \dfrac{1}{1+t}$

3

Réponse aux exercices

1.

Période	t	Coefficient multiplicateur
De janvier à février	$0,01368 = 1,368\%$	1,01368
De février à mars	$0,01887 = 1,887\%$	1,01887
De mars à avril	$0,03250 = 3,25\%$	1,03250
D'avril à mai	$-0,0129 = -1,29\%$	0,9871
De mai à juin	$0,00408 = 0,408\%$	1,00408
De juin à juillet	$0,01636 = 1,636\%$	1,01636
De juillet à août	$-0,01274 = -1,274\%$	0,98726
D'août à septembre	$-0,06119 = -6,119\%$	0,93881
De septembre à octobre	$-0,03693 = -3,693\%$	0,96307
D'octobre à novembre	$-0,09403 = -9,403\%$	0,90597
De novembre à décembre	$-0,01168 = -1,168\%$	0,98832

2. Évolution successive de mars et octobre :

   (a) $1,5167.1,03250.0,9871.1,00408.1,01636.0,98726.0,93881.0,96307 = 1,4081$. C'est correct.

   (b) $t + 1 = \dfrac{1,4081}{1,5164} = 0,9284$

   $t = -0,0716 = -7,16\%$.

3. A l'envers cette fois, d'octobre à mars

   (a) Coefficient multiplicateur : $\dfrac{1,5167}{1,4081} = 1,07713$

(b) $t = 0,07713 = 7,71\%$.

4. De mai à juin, le nombre de nouvelles infections est passé

   de 9381 à 3046
   $\dfrac{3046}{9381} = 0,3247 = 1 + t$, c'est le coefficient multiplicateur.
   Il y a eu une diminution : $t = -67,53\%$.

   Ainsi, il est possible de comparer cette évolution avec celle d'une autre partie du monde.

5. De septembre à octobre

   (a) $\dfrac{295199}{32073} = 9,20397 = 1 + t$ Réponse : $t = 8,20397 = 820,4\%$
   (b) $\dfrac{32073}{295199} = 0,10865 = 1 + t$ Réponse : $t = -0,89135 = -89,135\%$

   Une augmentation de $820,4\%$ sur 32073 est identique à une réduction de $89,135\%$ sur 295199 car la base de calcul n'est pas la même.

Chapitre 4

Géométrie analytique plane

4.0 Prérequis

A retenir

• Une équation est une égalité qui est vraie ou fausse.

Exemple : $3x - 4y = 7$ est vraie pour $x = 1$ et $y = -1$, noté $(1; -1)$ et fausse pour pour $x = 1$ et $y = 2$, noté $(1; 2)$.

• Résoudre un système de deux équations, c'est déterminer les couples $(x; y)$ tels que les deux équations soient vraies (solutions communes).

Exemple : $\left\{ \begin{array}{r} 3x - 4y = 7 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$ a comme solution $(1; -1)$.

• La méthode des combinaisons consiste à remplacer une des deux équations du système par une somme de multiples (non nuls) des deux équations.

On obtient alors un système qui a les mêmes solutions que le système de départ.

Réponse aux exercices

Les détails se trouvent à l'adresse :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/geometrie

1. Résous les systèmes suivants par la méthode des combinaisons.

   (a) $\left(-\frac{9}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

(b) $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$

(c) $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}\right)$

2. Résous les systèmes suivants par substitution.

(a) $(4; 7)$

(b) $(2; -2)$

(c) $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}\right)$

3. Résous les systèmes suivants par la méthode de ton choix.

(a) $(-1; 2)$

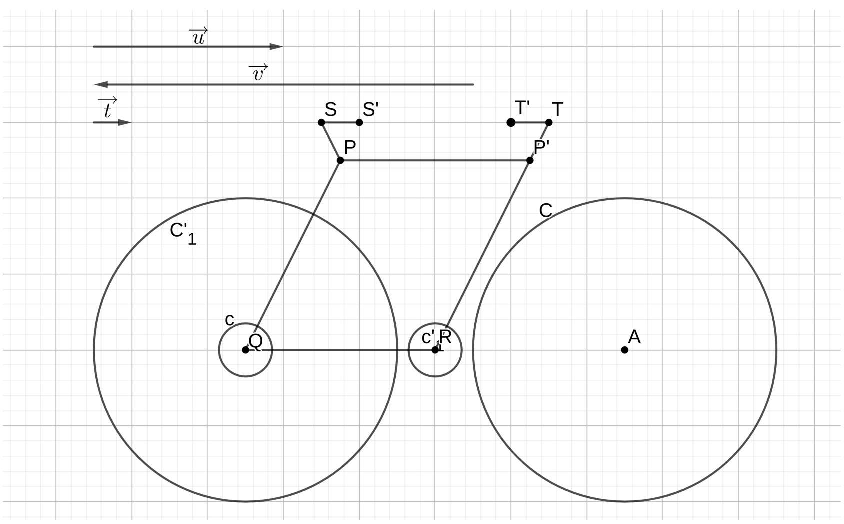
(b) Pas de solution

(c) $\left(\frac{24}{7}; \frac{44}{7}\right)$

(d) Pas de solution

(e) $\left(-\frac{11}{8}; -\frac{5}{4}\right)$

4. Construis les figures demandées.



4.1 Points et vecteurs

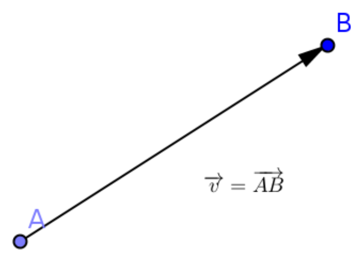
A retenir

Définition

Deux points A et B du plan, pris dans cet ordre, définissent un vecteur que l'on note $\overrightarrow{AB}$.

La notion de vecteur est identique à la notion de **translation** ou de **déplacement** de A en B.

En abrégé, on désignera un vecteur par la notation $\overrightarrow{v}$.



Composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Si, dans un repère du plan, les coordonnées du point A sont $(x_A; y_A)$ et celles du point $B\,(x_B; y_B)$,

les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les nombres qu'il faut ajouter aux coordonnées de A pour obtenir les coordonnées de B.

Autrement dit, les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Caractéristiques d'un vecteur

Le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

• sa **direction** : celle de la droite AB

• son **sens** : de A vers B

• sa **norme** : la distance entre A et B, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Remarques

• En physique, on définit une quatrième caractéristique, appelée point d'application, précisant la position de l'origine du vecteur. En mathématiques, en général on ne fixe pas l'origine, on parle alors de vecteur libre ; si par contre on choisit une origine particulière, on parle de vecteur lié.

• Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa norme vaut 0.

• Le vecteur nul a comme composantes $(0;0)$.

Norme d'un vecteur

Définition : La norme d'un vecteur est la distance entre son origine et son extrémité.
La norme du vecteur $\overrightarrow{v}$ se calcule par $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se calcule par $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Vecteurs égaux

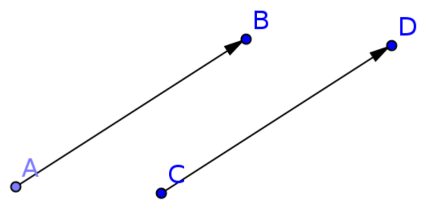
• Définition algébrique : Deux vecteurs qui ont les mêmes composantes sont égaux.

• Définition géométrique : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils sont nuls tous les deux ou s'ils ont

même direction

même sens

et même norme.
On écrit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.



Réponse aux exercices

1. Détermine les composantes et les normes des vecteurs

$\overrightarrow{AB}\,(4;2)$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AC}\,(-4;0)$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 4$

$\overrightarrow{AD}\,(4;-3)$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 5$

$\overrightarrow{CB}\,(8;2)$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2\sqrt{17}$

2. Donne avec précision la position relative des deux vecteurs donnés.

   (a) même extrémité, même norme

   (b) même direction (parallèles)

   (c) même norme, consécutifs

   (d) même origine

   (e) même extrémité, même direction (parallèles)

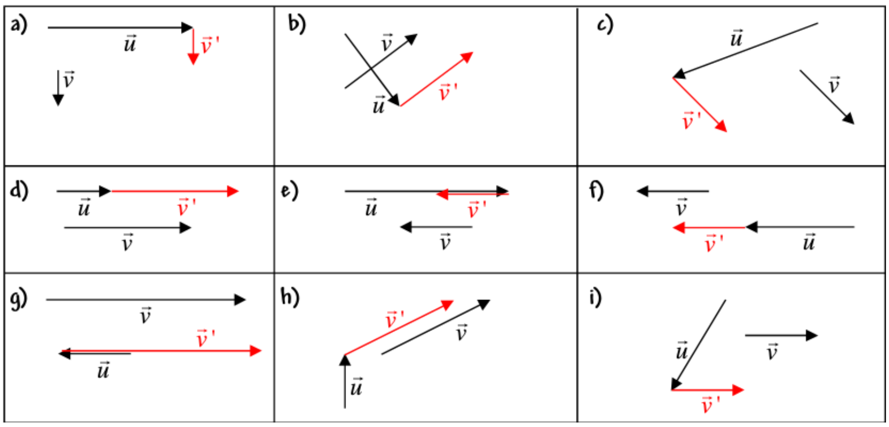
   (f) même direction (parallèles), consécutifs

   (g) même origine, même direction (parallèles), même sens

   (h) même direction (parallèles), même norme

   (i) consécutifs

3. Construis le vecteur égal à $\overrightarrow{v}$ qui est consécutif au vecteur $\overrightarrow{u}$.



4. Cite tous les vecteurs égaux à :

   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DC}$

   $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DA}$

   $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{GB}$

   $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{IB}$

   $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = ... = \overrightarrow{HH} = \overrightarrow{II}$.

5. Dans un repère, $A\,(2;3)$, $B\,(-4;5)$, $C\,(-3;-4)$ et $D\,(5;-1)$.

4

(a) $\overrightarrow{AB}\,(-6;2)$, $\overrightarrow{BA}\,(6;-2)$, $\overrightarrow{AC}\,(-5;-7)$, $\overrightarrow{AD}\,(3;-4)$, $\overrightarrow{BC}\,(1;-9)$, $\overrightarrow{DB}\,(-9;6)$, $\overrightarrow{CD}\,(8;3)$ et $\overrightarrow{BB}\,(0;0)$.

(b) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2\sqrt{10}$ et $\left\|\overrightarrow{BD}\right\| = 3\sqrt{13}$.

6. Trouve les coordonnées de

   (a) $A\,(4;1)$

   (b) $B\,(-5;6)$

7. Détermine les valeurs du nombre k

   $k = 4$ ou $k = 10$

8. Détermine les valeurs des réels m et n pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient égaux.

   $m = -3$ et $n = \pm 2$

9. Dans chaque cas, détermine les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

   (a) $D(9;-5)$

   (b) $D(1;\dfrac{14}{3})$

4.2 Opérations sur les vecteurs

A retenir

Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C,

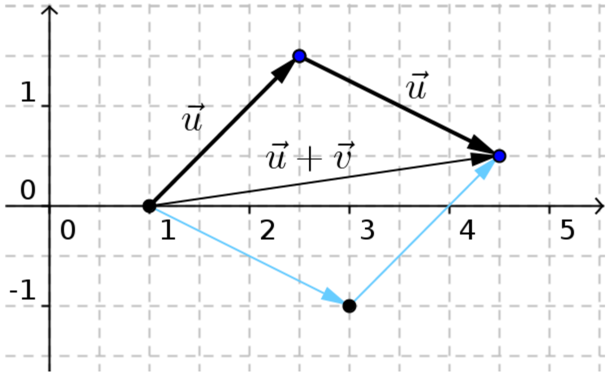
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Opérations hybrides

Toute opération sur les vecteurs
donne la même opération sur les composantes.

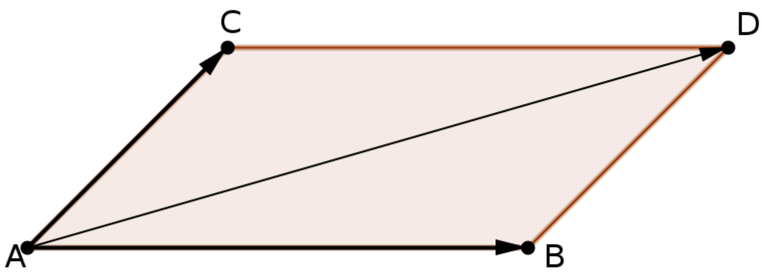
Somme de deux vecteurs

Dans un repère du plan, si $\overrightarrow{u}(u_1;u_2)$ et $\overrightarrow{v}(v_1;v_2)$, alors les composantes de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ sont $(u_1+v_1;u_2+v_2)$.



Règle du parallélogramme

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de même origine,
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D est le quatrième sommet du parallélogramme $ABDC$.



Démonstration
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ (égalité des vecteurs puis relation de Chasles)

Multiplication d'un vecteur par un nombre

Dans un repère du plan, si $\overrightarrow{v}(v_1;v_2)$,
alors les composantes de $k.\overrightarrow{v}$ sont $(k.v_1;k.v_2)$.
Géométriquement
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Alors, $k\overrightarrow{u}$ est un vecteur :
- de même direction que $\overrightarrow{u}$
- de même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k>0$ et de sens contraire à $\overrightarrow{u}$ si $k<0$

• de norme égale à $|k| . \|\overrightarrow{u}\|$.

Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est nul ou si le réel k est nul, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est nul.

Vecteurs parallèles

Deux vecteurs sont parallèles ssi l'un est multiple de l'autre.

Autrement dit, $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$ (pour un certain $k \in \mathbb{R}$).

En particulier, le vecteur nul est parallèle à tout vecteur.

Déterminant de deux vecteurs

4

Dans un repère du plan, le vecteur $\overrightarrow{u}\,(x_u; y_u)$ et le vecteur $\overrightarrow{v}\,(x_v; y_v)$.

Définition

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u.y_v - x_v.y_u$.

Propriété

$$\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v} \iff \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration

Si $\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{v}$, alors $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ et $kx_v.y_v - x_v.ky_v = k.(x_vy_v - x_vy_v) = 0$

Si $\overrightarrow{v} = k.\overrightarrow{u}$, le raisonnement est identique.

Réciproque

Si $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = 0$ alors $x_u.y_v - x_v.y_u = 0$ et donc $x_u.y_v = x_v.y_u$.

1. Si $y_u = 0$ alors $x_u = 0$ ou $y_v = 0$ (règle du produit nul)

   Dans le premier cas, $\overrightarrow{u}\,(0; 0)$ est parallèle à tout vecteur.

   Dans le second cas, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs horizontaux et donc parallèles.

2. Si $y_u \neq 0$ alors $x_u \neq 0$ (règle du produit nul)

   Divisons $x_u.y_v = x_v.y_u$ par $x_u.y_u$ ce qui donne $\dfrac{y_v}{y_u} = \dfrac{x_v}{x_u}$.

Appelons ce nombre k. $\begin{cases} x_v = k.x_u \\ y_v = k.y_u \end{cases}$ et donc, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs parallèles.

NB

Des vecteurs parallèles sont parfois appelés **colinéaires.**

Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions forment un angle droit.

Notation

$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Vecteurs orthogonaux et composantes

Dans un repère orthonormé[1] du plan, le vecteur $\overrightarrow{u}(x_u; y_u)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v}(x_v; y_v)$ si et seulement si $x_u.x_v + y_u.y_v = 0$.

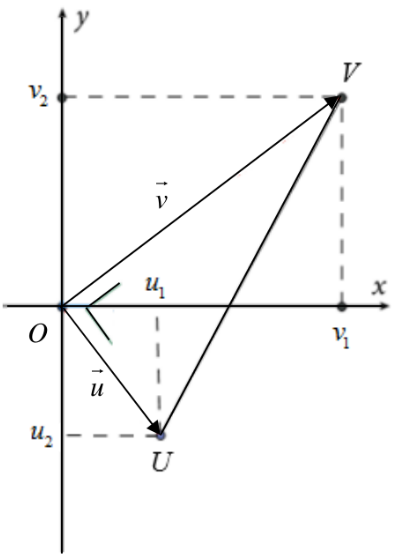
$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff x_u.x_v + y_u.y_v = 0$

Démonstration

Comme indiqué dans la propriété, le plan est muni d'un repère orthonormé, d'origine O.

Nous pouvons déplacer les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de sorte que leurs origines soient O.

[1]Un repère orthonormé a des axes perpendiculaires qui portent la même unité.



L'extrémité du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le point U.

L'extrémité du vecteur $\overrightarrow{v}$ est le point V.

Composantes de $\overrightarrow{u}$

Composantes de $\overrightarrow{v}$

Composantes de $\overrightarrow{UV}$

En appliquant le théorème de Pythagore et sa réciproque dans le triangle rectangle OUV,

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ssi

Décomposition d'un vecteur

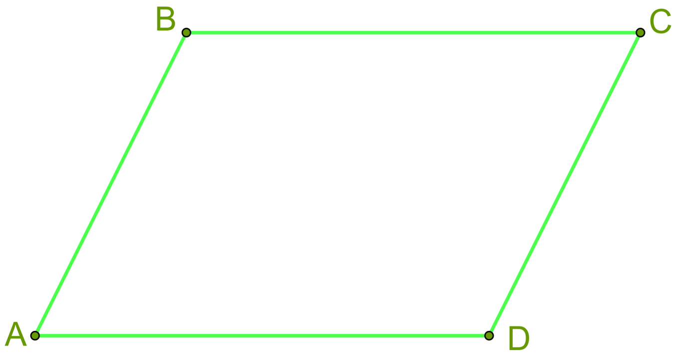
Lorsque $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$

on parle de « décomposition » du vecteur $\overrightarrow{BD}$

comme s'il s'agissait de composer des translations.

C'est de là que provient le mot « composantes » (ici $(-2; 2)$ si $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OI}$ ne sont pas parallèles).

Parallélogramme et vecteurs égaux

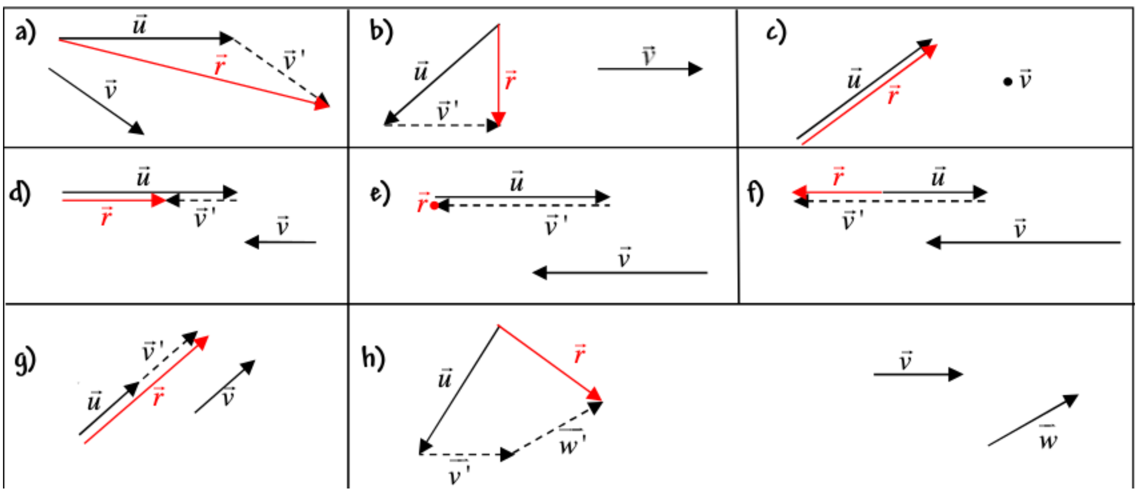


$ABCD$ est un parallélogramme $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Milieu d'un segment

M milieu de $[A;B]$ $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$

Réponse aux exercices

1. 

2. Complète les égalités suivantes.

(a) $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$

(b) $\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IO}$

(c) $\overrightarrow{CL} = -3\overrightarrow{EB}$

(d) $\overrightarrow{OH} = \frac{7}{10}\overrightarrow{OE}$

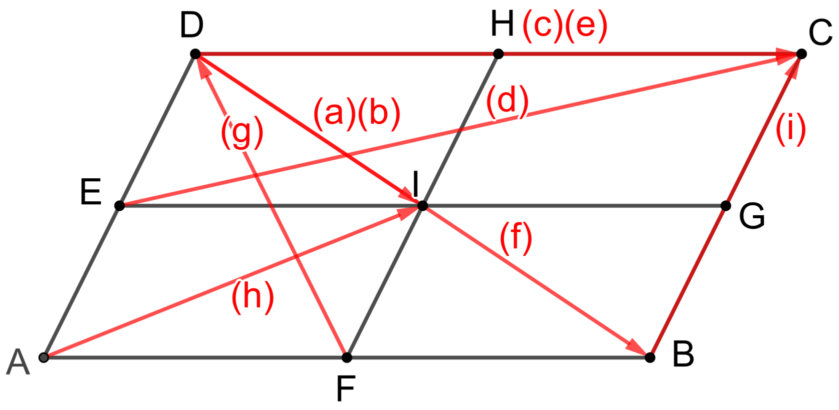
(e) $\overrightarrow{AO} = -\frac{14}{5}\overrightarrow{LG}$

(f) $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{IE}$

3. Soit $ABCD$ un parallélogramme, F le milieu de $[AB]$,

   G le milieu de $[BC]$, H le milieu de $[CD]$, E le milieu de $[AD]$

   et I l'intersection des médianes.



Construis :

(j) $2\overrightarrow{DH} - 2\overrightarrow{IC} - 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{0}$

Complète :

(a) $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$

(b) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{0}$

(c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC}$

(d) $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB}$

(e) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

f) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{HB}$

g) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI}$
ou $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AI}$
ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AI}$

h) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AF}$

i) $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BI}$

j) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{DB}$

4. Complète, à l'aide du parallélépipède rectangle :

   Tout vecteur parallèle, de même norme et de même sens que la réponse fournie est aussi une réponse.

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'}$

(b) $\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{A'B}$

(c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'K} = \overrightarrow{AK}$

(d) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{OG}$

(e) $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{0}$

(f) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{A'B'}$

5. Détermine les composantes des vecteurs

$\overrightarrow{u}\,(1;2) \qquad \overrightarrow{v}\,(3;-2)$

(g) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\,(4;0)$

(h) $\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}\,(1;-6)$

(i) $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\,(-1;6)$

(j) $5\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}\,(-4;16)$

(k) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{v}\,\left(-\frac{7}{4};\frac{5}{2}\right)$

6. Exprime les vecteurs suivants comme sommes de multiples des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

(a) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OJ}$

(b) $\overrightarrow{AB} = -2\overleftrightarrow{OJ}$

(c) $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{OI}$

(d) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{OI}$

(e) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$

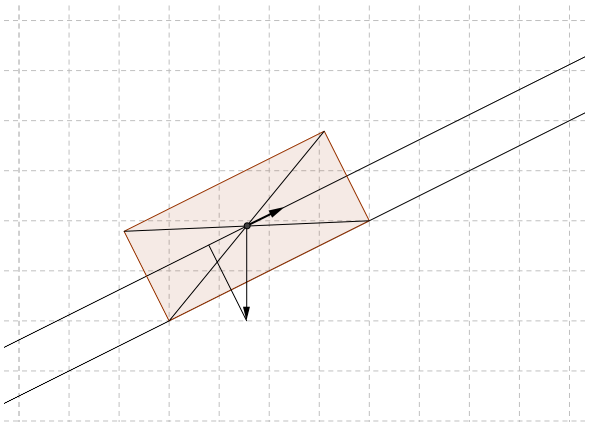
(f) $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$

(g) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$

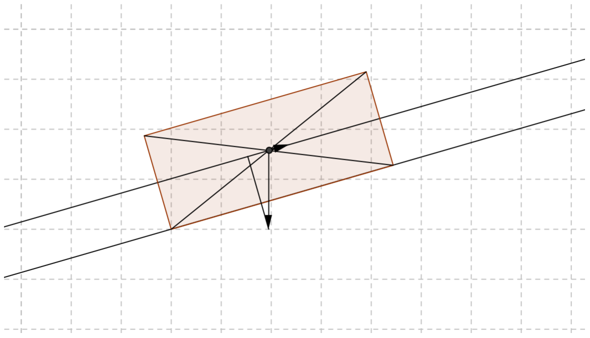
(h) $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$

7. Dans chaque figure, un point matériel est prêt à glisser sur un plan incliné. Son poids est indiqué par un vecteur vertical.

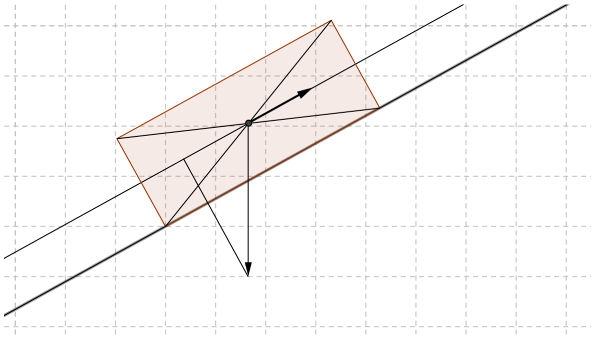
Dessine la force (parallèle au plan incliné) à appliquer au point matériel pour qu'il ne glisse pas.



(a)



(b)



(c)

8. Le tendeur fait son office et exerce une force pour compenser $\overrightarrow{F_1}$. Évidemment, cette force s'exerce le long du tendeur.

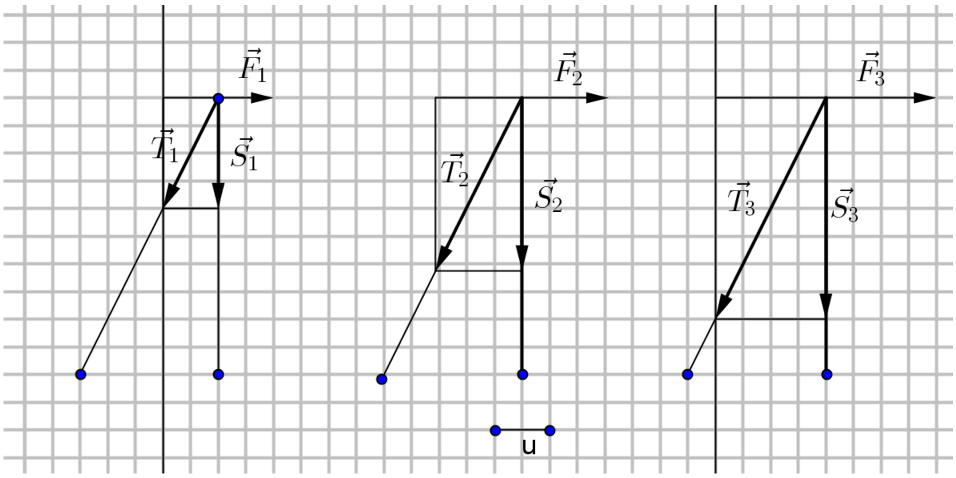
   (a) Dessine cette force (la force du tendeur), appelée $\overrightarrow{T_1}$, et ensuite la somme de cette force et de $\overrightarrow{F_1}$, appelée $\overrightarrow{S_1}$.

   (b) Direction et le sens de cette somme, $\overrightarrow{S_1}$: verticale vers le bas.

   (c) Sur la deuxième figure, dessine cette force (la force du tendeur), appelée $\overrightarrow{T_2}$, et ensuite la somme de cette force et de $\overrightarrow{F_2}$, appelée $\overrightarrow{S_2}$.

   (d) Sur la troisième figure, dessine cette force (la force du tendeur), appelée $\overrightarrow{T_3}$, et ensuite la somme de cette force et de $\overrightarrow{F_3}$, appelée $\overrightarrow{S_3}$.

   (e) Sachant que la force maximale que peut exercer le tendeur est de 3 unités, indique dans quel(s) cas la tonnelle s'envolera.



La tonnelle s'envole dans les 2 derniers cas.

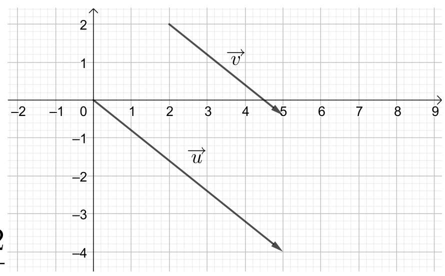
9. Détermine les composantes des vecteurs $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ parallèles au vecteur $\overrightarrow{u}$.

   (a) $\overrightarrow{u}\,(1;-2)$ $\quad$ $\overrightarrow{t}\,(2;-4)$ $\quad$ $\overrightarrow{v}\,(-3;6)$ $\quad$ $\overrightarrow{w}\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

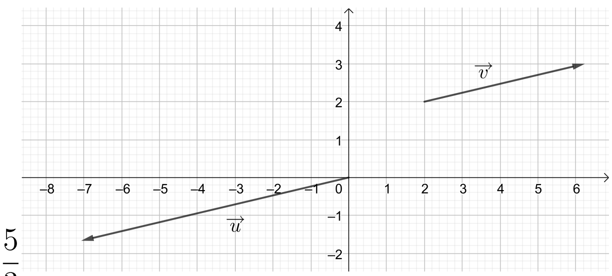
   (b) $\overrightarrow{u}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ $\quad$ $\overrightarrow{t}\,(-3;2)$ $\quad$ $\overrightarrow{v}\,(-3;2)$ $\quad$ $\overrightarrow{w}\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$

10. Détermine les valeurs que le réel a peut prendre pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient parallèles.

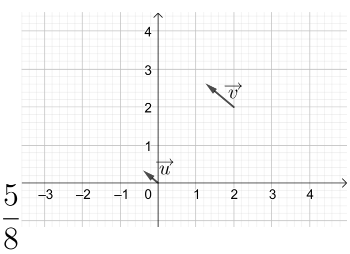
    Trace ensuite les deux vecteurs.



   (a) $a = -\frac{12}{5}$

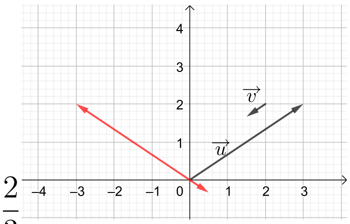


   (b) $a = -\frac{5}{3}$



   (c) $a = \frac{5}{8}$

(d) impossible



(e) $a = \pm\dfrac{2}{3}$

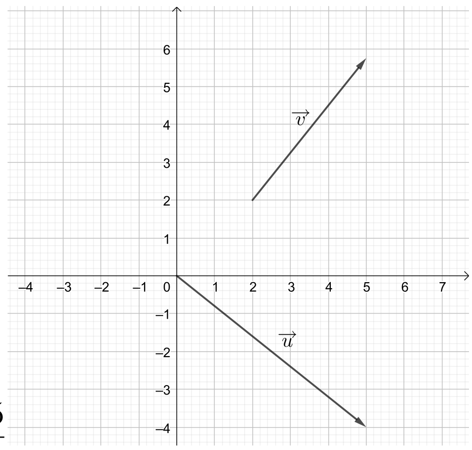
11. Détermine les composantes des vecteurs $\vec{t}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ orthogonaux au vecteur $\vec{u}$.

(a) $\vec{u}\,(1;-2)$ $\quad\vec{t}\,(2;1)$ $\quad\vec{v}\left(-3;-\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad\vec{w}\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

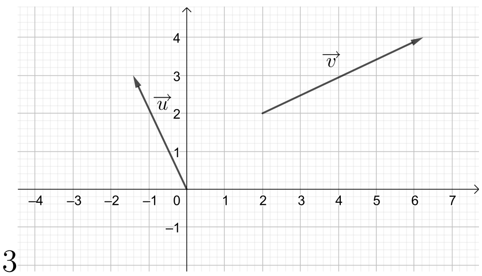
(b) $\vec{u}\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$ $\quad\vec{t}\,(6;9)$ $\quad\vec{v}\left(-3;-\dfrac{9}{2}\right)$ $\quad\vec{w}\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$

12. Détermine les valeurs que le réel a peut prendre pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

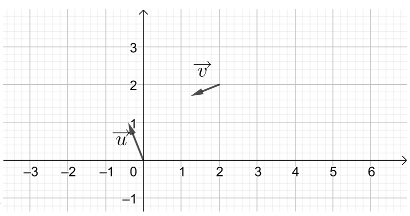
Trace ensuite les deux vecteurs.



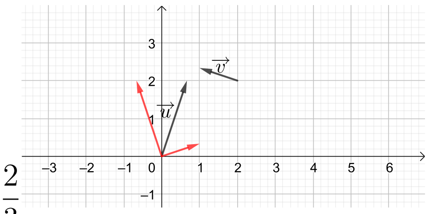
(a) $a = \dfrac{15}{4}$



(b) $a = 3$



(c) $a = -\dfrac{3}{10}$



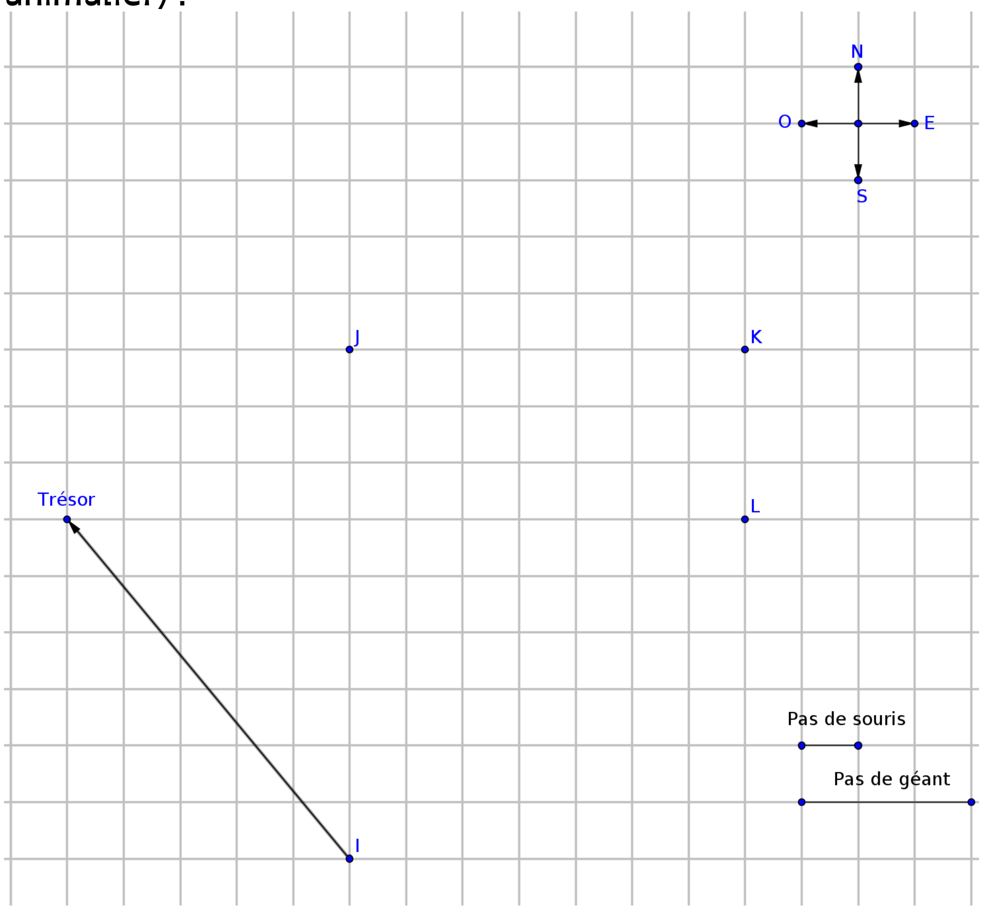
(d) $a = \pm\dfrac{2}{3}$

13. Le trésor du pirate est enterré dans une île déserte.

Indiana sait qu'il doit parcourir 3 pas de géant vers le nord, 7 pas de souris vers l'est, puis 3 pas de souris vers le sud et enfin 4 pas de géants vers l'ouest pour y parvenir.

(a) Où se trouve le trésor ?

(b) Comment y arriver plus simplement (sur le dessin et en français animalier) ?



1 pas de géant et 2 pas de souris à l'ouest, 2 pas de géant vers le nord

14. Détermine les coordonnées des points

(a) $V\left(-5; \dfrac{9}{2}\right)$

(b) $W\,(14; -5)$

(c) $Z\,(-15; 11)$

(d) $U\left(10; -\dfrac{21}{4}\right)$

(e) $E\,(4;-7)$

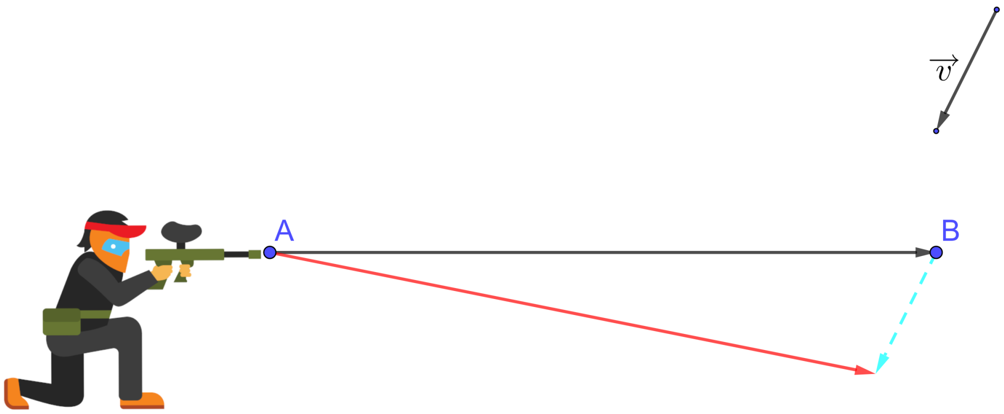
(f) $F\,(-13;4)$

Les exercices 11 à 17 sont corrigés en ligne.

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/geometrie

Exercices supplémentaires

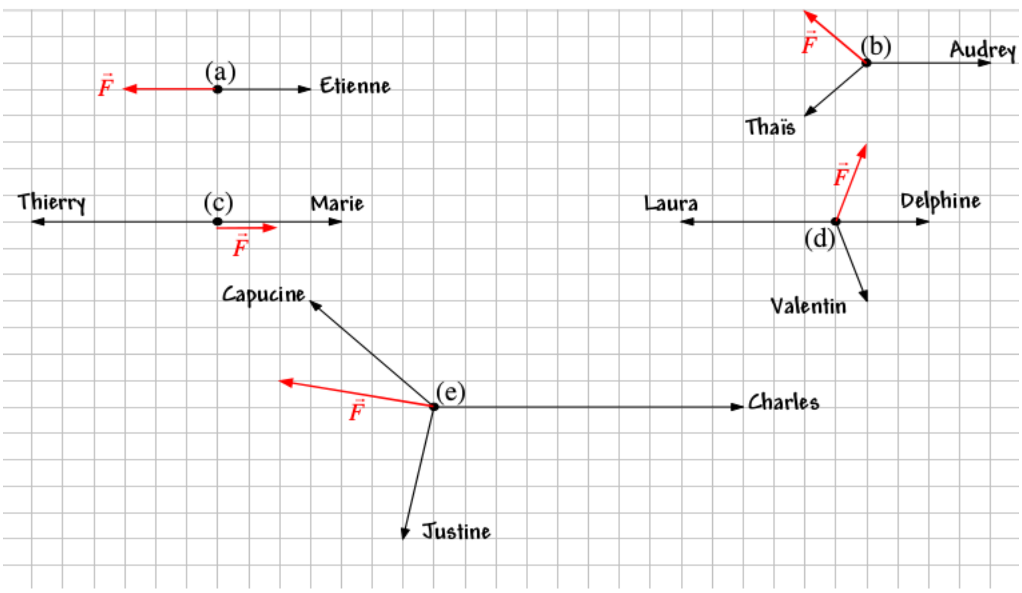
1. Sophie joue au paintball.



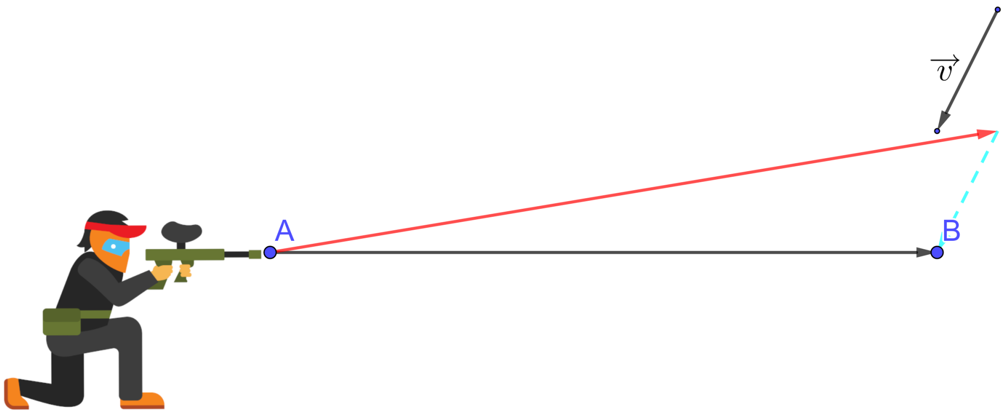
Retrouve Sophie et son lanceur sur

https ://www.geogebra.org/classic/erjeuckq

2. Jeu de l'anneau



3. Sophie joue encore au paintball.



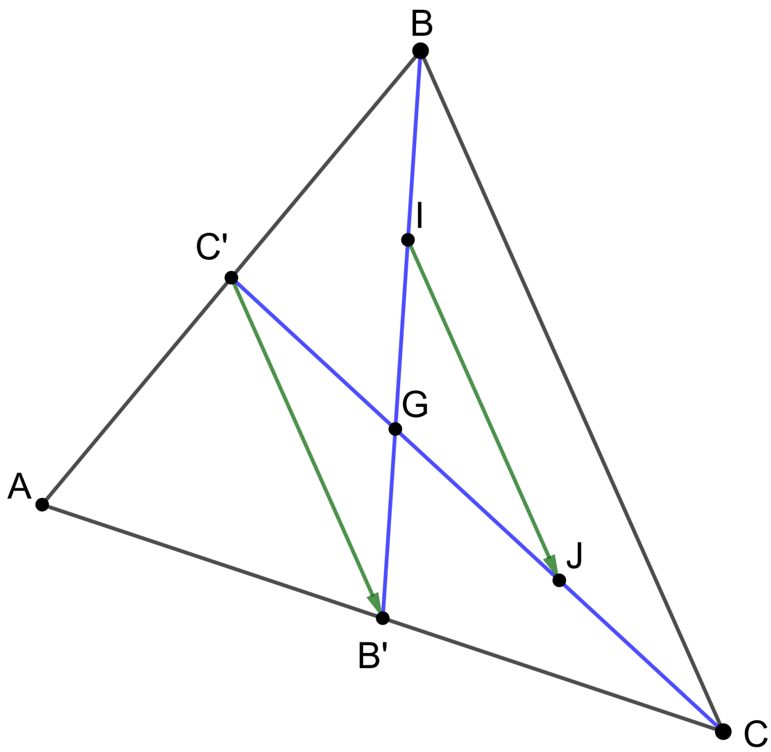
Retrouve Sophie et son lanceur sur

https ://www.geogebra.org/classic/erjeuckq

4

4. Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs de $[C;A]$ et $[A;B]$ et G le point d'intersection des médianes $[B;B']$ et $[C;C']$.

Si I est le milieu de $[GB]$ et J le milieu de $[GC]$,



(a) montre que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{C'B'}$. Que peux-tu en conclure ?

Réponse : Dans le triangle GBC, I et J sont les milieux de 2 côtés. IJ est donc parallèle au $3^{ème}$ côté et en vaut la moitié, ce qui s'écrit simplement $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Dans le triangle ABC, B' et C' sont les milieux de 2 côtés. $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{C'B'}$. J'en conclus que C'IJB' est un parallélogramme.

(a) Montre que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{BB'}$. Que peux-tu en conclure ?

Réponse : Comme C'IJB' est un parallélogramme, $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{GB'}$, et comme I est le milieu de $[G;B]$, $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IG}$.

$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{GB'}$ et donc $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{BB'}$. J'en conclus que le point d'intersection des deux médianes se trouve aux $\frac{2}{3}$ de $[B;B']$ en partant du sommet.

5. Voici les coordonnées de quelques points du plan : $A\,(-2;4)$, $B\,(6;-3)$, $C\,(0;1)$ et $D\,(-1;-4)$.

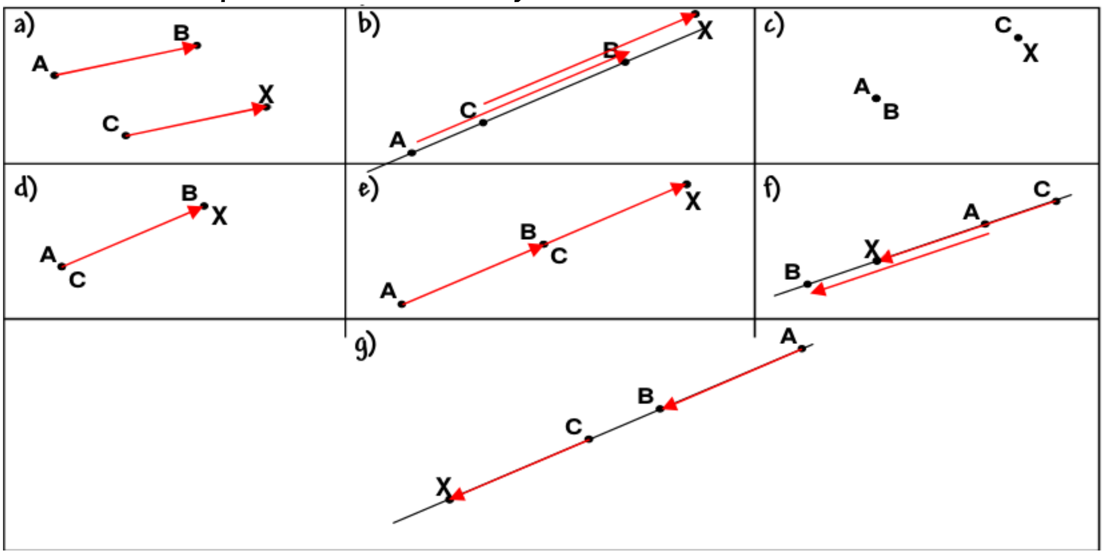
   (a) $\overrightarrow{AB}\,(8;-7)$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{113}$ et $\overrightarrow{DB}\,(7;1)$ $\left\|\overrightarrow{DB}\right\| = 5\sqrt{2}$

   (b) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}\,(19;1)$

   (c) Coordonnées du point E pour que $BCAE$ soit un parallélogramme

   Réponse : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}\,(6;-4)$ donc $E\,(4;0)$

6. Construis le point X sachant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CX}$.



7. Soient dans un repère orthonormé les points $A(3;-2)$, $B(-4;3)$, $C(-1;1)$ et $D(\dfrac{1}{2};-1)$.

   (a) Calcule les composantes des vecteurs suivants (et les normes des deux derniers) :

      i. $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}\,(-18;11)$

      ii. $\overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{AC}\left(\dfrac{33}{2};-13\right)$

4

iii. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}\,(3;-2)$ norme : $\sqrt{13}$

iv. $4\overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB}\,(-3;-1)$ norme : $\sqrt{10}$

(b) $E\,(-8;6)$

(c) $F\,(-20;13)$

8. A l'aide de la figure, complète

(a) $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{DL} - \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{AJ}$

(b) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ND} - 2\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0}$

(c) $2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{FM} + 2\overrightarrow{BI} - 2\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{MD}$

(d) $\overrightarrow{DJ} - 2\overrightarrow{AN} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KI}$

(e) $\overrightarrow{GP} - 2\overrightarrow{DL} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{ON}$

9. Détermine les valeurs éventuelles du réel a pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient parallèles :

(a) $a = \dfrac{68}{21}$

(b) $a = \dfrac{5}{32}$

10. $b = -\dfrac{15}{23}$ $c = \dfrac{19}{23}$ $d = \dfrac{35}{6}$

4.3 Équations d'une droite

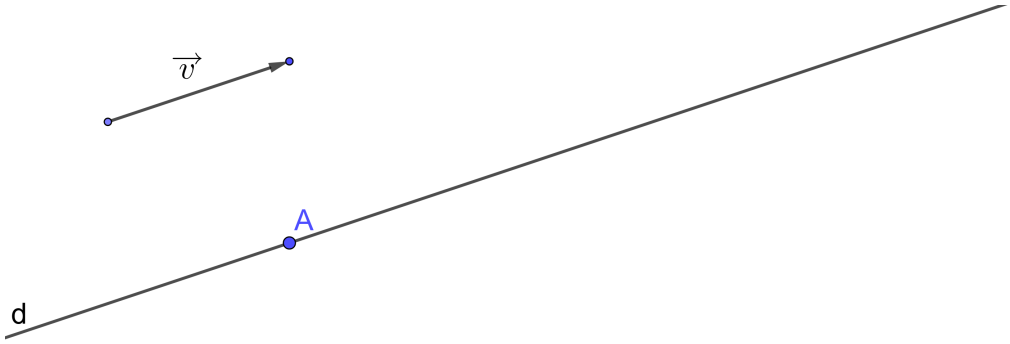
Dans tout cette section le repère est orthonormé.

A retenir

Équation vectorielle d'une droite

Au départ, A est un point et $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul.
Ils déterminent une droite dont la direction est $\overrightarrow{v}$ (vecteur directeur).

4



Le point P appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AP} = k.\vec{v}$. $\overrightarrow{AP} = k.\vec{v}$ est une équation vectorielle de la droite.

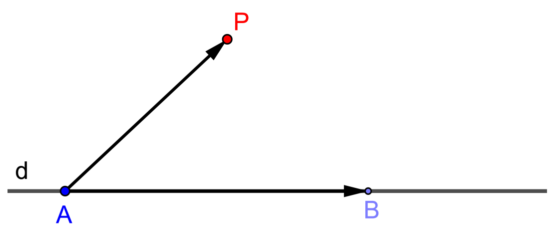
Si A et B sont deux points distincts, il existe une seule droite contenant A et B, appelée droite AB (axiome d'Euclide).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a la direction de la droite AB. $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ (vecteur directeur).

Le point P appartient à la droite AB si et seulement si $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ est une équation vectorielle de la droite.

Lorsque l'équation $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ est fausse, le point P n'appartient pas à la droite AB.

Lorsque l'équation $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ est vraie, le point P appartient à la droite AB.

	
Faux	Vrai

Équations paramétriques d'une droite

Au départ, A est un point et $\vec{v}$ un vecteur non nul.

Dans un repère du plan, la droite d contenant le point $A(x_A; y_A)$ et de direction $\overrightarrow{v}(x_v; y_v)$ a comme équation
$\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$.

En clair, le point $P(x; y)$ appartient à la droite d ssi $\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$.

Démonstration

Dans le repère choisi, nous avons $A(x_A; y_A)$, $\overrightarrow{v}(x_v; y_v)$ et notre point quelconque $P(x; y)$.

Dans l'équation vectorielle $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$, remplaçons les vecteurs par leurs composantes :

$(x - x_A; y - y_A) = k.(x_v; y_v)$

$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

Cela peut s'écrire :

$\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$ où k est un nombre réel.

Ce système est appelé équations paramétriques de la droite d.

Si la droite est donnée par 2 points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

il suffit de prendre le vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Tu obtiens

$\begin{cases} x - x_A = k.(x_B - x_A) \\ y - y_A = k.(y_B - y_A) \end{cases}$ où k est un nombre réel.

Remarque

Il est possible d'obtenir autant de points qu'on veut de la droite en choisissant autant de valeurs de k.

Équation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne d'une droite peut s'obtenir en éliminant le paramètre k du système d'équations paramétriques de cette droite :

$\begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$

1^{er} **cas : droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale)**

Cette droite contient deux points qui ont la même abscisse.

Un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}\,(0; y_v)$.

Une droite verticale a une équation de la forme $x = x_A$.

2ème cas : droite non verticale

$d \equiv \begin{cases} x - x_A = k.x_v \\ y - y_A = k.y_v \end{cases}$, où $x_v \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_A}{x_v} = k \\ y - y_A = k.y_v \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_A}{x_v} = k \\ y - y_A = \dfrac{x - x_A}{x_v}.y_v \end{cases}$$

La deuxième équation devient $y - y_A = \dfrac{y_v}{x_v}(x - x_A) \Longleftrightarrow y - y_A = \dfrac{y_v}{x_v}x - \dfrac{y_v}{x_v}x_A \Longleftrightarrow$ $y = \dfrac{y_v}{x_v}x - \dfrac{y_v}{x_v}x_A + y_A$

Cette équation a la forme $\boxed{y = mx + p \text{ avec } m = \dfrac{y_v}{x_v}.}$

Nous voici revenu l'année dernière, avec une fonction du premier degré de pente m (fonction constante si $m = 0$).

4

Méthode rapide

La droite d est définie par le point $A\,(x_A; y_A)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(x_v; y_v)$.

Le point $P\,(x; y)$ appartient à la droite d si et seulement si

les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles,

c'est-à-dire ssi leur déterminant est nul.

$\overrightarrow{AP}\,(x - x_A; y - y_A)$

$$P \in d \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_v \\ y - y_A & y_v \end{vmatrix} = 0$$

$d \equiv y_v\,(x - x_A) - x_v\,(y - y_A) = 0$

Forme canonique (ou implicite) d'une équation cartésienne

Dans un repère du plan, l'équation $ax + by + c = 0$

où a et b ne sont pas tous les deux nuls, est celle d'une droite.

Exemples

1. Si $a = 0$ l'équation donne, par exemple, $3y + 4 = 0 \Longleftrightarrow 3y = -4 \Longleftrightarrow y = -\dfrac{4}{3}$ qui est une droite horizontale (pente 0).

2. Si $b = 0$ l'équation donne, par exemple, $2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -\dfrac{3}{2}$ qui est une droite verticale (pas de pente).

3. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ l'équation donne, par exemple,
$2x + 3y - 4 = 0 \iff 3y = -2x + 4 \iff y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$ qui est une droite oblique (pente $-\dfrac{2}{3}$).

Dans un repère du plan,

toute droite a pour équation $ax + by + c = 0$ **où a et b ne sont pas tous les deux nuls.**

Réponse aux exercices

1.

	AB	BC	CA
Équation vectorielle	$\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{CA}$
Vecteur directeur	$\overrightarrow{v}\,(2; -4)$	$\overrightarrow{v}\,(3; 5)$	$\overrightarrow{v}\,(-5; -1)$
Équations paramétriques	$\begin{cases} x - 1 = 2k \\ y - 2 = -4k \end{cases}$	$\begin{cases} x - 3 = 3k \\ y + 2 = 5k \end{cases}$	$\begin{cases} x - 6 = -5k \\ y - 3 = -k \end{cases}$
Pente	$\frac{-4}{2} = -2$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$
Équation cartésienne	$y = -2x + p$ $2 = -2+p \Rightarrow p = 4$ $y = -2x + 4$	$y = \frac{5}{3}x + p$ $-2 = 5+p \Rightarrow p = 7$ $y = \frac{5}{3}x + 7$	$y = \frac{1}{5}x + p$ $3 = \frac{6}{5} + p \Rightarrow p = \frac{9}{5}$ $y = \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$

2. Détermine un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne de la droite contenant les points suivants :

   (a) $\overrightarrow{AB}(-3; -6)$ $m = 2$ $y = 2x + p$ Réponse : $y = 2x - 3$

   (b) $\overrightarrow{AB}(2; 1)$ $m = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}x + p$ Réponse : $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

   (c) $\overrightarrow{AB}(-2; 0)$ $m = 0$ $y = p$ Réponse : $y = 4$

3. Dans chacun des cas, détermine une équation cartésienne de la droite d

   (a) $m = -3$ Réponse : $y = -3x - 1$

   (b) Droite verticale Réponse : $x = 3$

   (c) $m = 0$ Réponse : $y = 2$

(d) $m = 6$ Réponse : $y = 6x - 17$

(e) $m = 0$ Réponse : $y = -2$

(f) Droite verticale Réponse : $x = 3$

4. Soit la droite $d \equiv \begin{cases} x = 3k - 1 \\ y = -5k + 3 \end{cases}$

(a) $A(-1; 3)$

(b) $B(2; -2)$

(c) $\overrightarrow{v}(3; -5)$

(d) Détermine, pour chacun des points de cette droite donnés ci-après, les coordonnées complètes :

i. $\begin{cases} x = 3k - 1 \\ -4 = -5k + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3k - 1 \\ k = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{5} - 1 \\ k = \frac{7}{5} \end{cases}$ Réponse : $C\left(\frac{16}{5}; -4\right)$

ii. $\begin{cases} \frac{3}{8} = 3k - 1 \\ y = -5k + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{11}{24} \\ y = -\frac{55}{24} + 3 \end{cases}$ Réponse : $D\left(\frac{3}{8}; \frac{17}{24}\right)$

5. Soit la droite d passant par $A(2; -4)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}(-3; 1)$ comme vecteur directeur.

(a) $d \equiv \begin{cases} x - 2 = -3k \\ y + 4 = k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$.

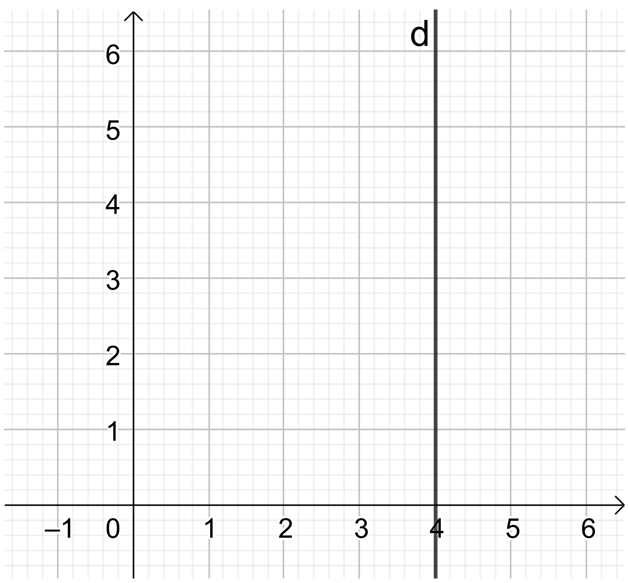
(b) B oui, avec $k = 2$; C non.

(c) $d \equiv \begin{cases} x + 4 = -3k \\ y + 2 = k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$.

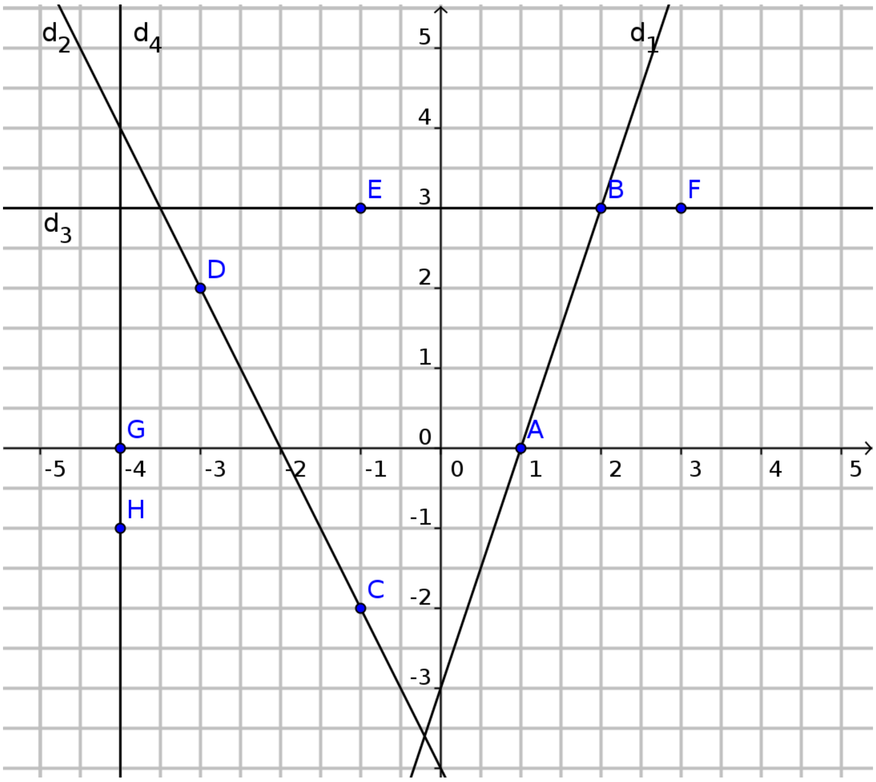
6. Dans un repère du plan, on considère les points $A(4; 1)$ et $B(4; -2)$.

(a) $\overrightarrow{v}(0; -3)$ Réponse $d \equiv \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - 1 = -3k \end{cases}$

(b) $(4; 0)$, $(4; 2)$ et $(4; -1)$

(c) 

7. Trace et donne la pente des droites suivantes



(a) 3

(b) -2

(c) 0

(d) pas de pente

8. Détermine une équation cartésienne des droites suivantes :

(a) $d_1 \equiv y = 2x + 5$

(b) $d_2 \equiv y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

(c) $d_3 \equiv x = -6$

(d) $d_4 \equiv y = -2$

(e) $d_5 \equiv y = -2x$

(f) $d_6 \equiv x = -1$

(g) $d_7 \equiv y = x + 5$

(h) $d_8 \equiv y = -6$

9. Indique si les points suivants sont alignés ou non.

(a) $AB \equiv y = 2x + 4$ alignés !

(b) $\overrightarrow{AB}\,(2;2)$ $\overrightarrow{AC}\,(3;-2)$ non alignés

(c) $AB \equiv y = -5$ alignés !

4

10. Détermine des équations paramétriques de la droite

   (a) $d \equiv \begin{cases} x = 2 - 4k \\ y = 3 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

   (b) $d' \equiv \begin{cases} x = -5 - 4k \\ y = 6 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

11. droite d définie par le système d'équations paramétriques $d \equiv \begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = -k + 5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$.

   (a) $A(-3;5)$ et $\overrightarrow{v_d}(2;-1)$.

   (b) $d \cap Ox : (7;0) \qquad d \cap Oy : \left(0; \frac{7}{2}\right)$

   (c) $d' \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} + k \\ y = -\frac{2}{3} + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

   (d) $d \equiv y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ et $d\prime \equiv y = 2x - \frac{5}{3}$

   (e) $\left(\frac{31}{15}; \frac{37}{15}\right)$

12. Trouve le coefficient directeur (pente) des droites suivantes puis indique si elles sont verticales, horizontales, croissantes ou décroissantes.

   (a) $m_{d_1} = -4 \qquad \searrow$

   (b) $m_{d_2} = \frac{3}{4} \qquad \nearrow$

   (c) $m_{d_3} = \frac{3}{2} \qquad \nearrow$

   (d) Pas de pente d_4 est verticale

   (e) $m_{d_5} = \frac{3}{4} \qquad \nearrow \qquad m_{d_6} = 0 \qquad d_6$ est horizontale.

13. $AB \equiv y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4} \qquad 8 = \frac{15}{4} + \frac{17}{4} \qquad A$, B et C sont alignés.

4.4 Droites parallèles ou perpendiculaires

A retenir

Dans ce qui suit, d_1 et d_2 sont deux droites du plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}(x_{v1}; y_{v1})$ et $\overrightarrow{v_2}(x_{v2}; y_{v2})$ et de pentes m_1 et m_2.
Le repère est orthonormé si nécessaire (perpendicularité).

• Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même vecteur directeur.
• Deux droites qui ont la même pente sont parallèles.
• Deux droites verticales sont parallèles.

• Deux droites sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux : $x_{v1}.x_{v2} + y_{v1}.y_{v2} = 0$.
• Lorsque $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ (inverse de l'opposé), les droites sont perpendiculaires.

Démonstration

$x_{v1}.x_{v2} + y_{v1}.y_{v2} = 0 \Rightarrow y_{v1}.y_{v2} = -x_{v1}.x_{v2} \Rightarrow \dfrac{y_{v1}.y_{v2}}{x_{v1}.x_{v2}} = -\dfrac{x_{v1}.x_{v2}}{x_{v1}.x_{v2}}$
$\dfrac{y_{v1}.y_{v2}}{x_{v1}.x_{v2}} = -1 \Rightarrow \dfrac{y_{v1}}{x_{v1}}.\dfrac{y_{v2}}{x_{v2}} = -1 \Rightarrow m_1.m_2 = -1$
Il suffit de diviser par m_1 pour conclure.
On peut aussi retenir $m_1.m_2 = -1$.

• Une droite verticale (pas de pente) est perpendiculaire
à une droite horizontale (pente 0).
Exemple : $d \equiv x = 2$ et $d' \equiv y = -3$ sont perpendiculaires.
• Une droite horizontale (pente 0) est perpendiculaire
à une droite verticale (pas de pente).
Exemple : $d \equiv y = 4$ et $d' \equiv x = 1$ sont perpendiculaires.

• Le milieu du segment $[AB]$ est donné par la une formule : $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ dans laquelle $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$.

Démonstration

Les vecteurs nous ont appris que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Remplaçons les vecteurs par leurs composantes :
$\begin{cases} x_M - x_A = \frac{1}{2}\left(x_B - x_A\right) \\ y_M - y_A = \frac{1}{2}\left(y_B - y_A\right) \end{cases}$ Distribue car il y a x_A à deux endroits :
$\begin{cases} x_M - x_A = \frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}x_A \\ y_M - y_A = \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_A \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}x_B - \frac{1}{2}x_A + x_A \\ y_M = \frac{1}{2}y_B - \frac{1}{2}y_A + y_A \end{cases}$ Regroupons les x_A :
$\begin{cases} x_M = \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{2}x_A \\ y_M = \frac{1}{2}y_B + \frac{1}{2}y_A \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = \frac{1}{2}\left(x_A + x_B\right) \\ y_M = \frac{1}{2}\left(y_A + y_B\right) \end{cases}$ et tu termines toi-même.

4

• La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite qui coupe $[AB]$ perpendiculairement en son milieu.

Un triangle a donc 3 médiatrices, puisqu'il a 3 côtés.

• Un triangle a 3 hauteurs :

chacune passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé.

• Un triangle a 3 médianes :

chacune passe par un sommet et le milieu du côté opposé.

Réponse aux exercices

1. Détermine un système d'équations paramétriques de la droite

   (a) $d \equiv \begin{cases} x-2=-k \\ y-3=-4k \end{cases}$

   (b) $d_1 \equiv \begin{cases} x+1=-k \\ y-2=-4k \end{cases}$ contenant le point $C\,(-1;2)$ et parallèle à d.

   (c) $d_2 \equiv \begin{cases} x+2=4k \\ y=-k \end{cases}$ contenant le point $D\,(-2,0)$ et perpendiculaire à d.

2. Détermine une équation cartésienne de chacune des droites suivantes.

   (a) $d_1 \equiv y = -\frac{1}{2}x$

   (b) $d_2 \equiv y = \frac{2}{3}x + 2$

   (c) $d_3 \equiv y = -2x + 3$

   (d) $d_4 \equiv y = 2$

   (e) $d_5 \equiv x = -7$

   (f) $d_6 \equiv y = -\frac{1}{3}x + 1$

   (g) $d_7 \equiv y = -5x - 13$

   (h) $d_8 \equiv y = -\frac{1}{3}x$

   (i) $d_9 \equiv y = -\frac{7}{4}x - 1$

   (j) $d_{10} \equiv x = 5$

   (k) $d_{11} \equiv y = \frac{x}{10} + 3$

   (l) $d_{12} \equiv y = 2$

3. Établis les correspondances entre les deux colonnes.

   1) B C et H

   2) A D et G

   3) E et F

   4) C et I

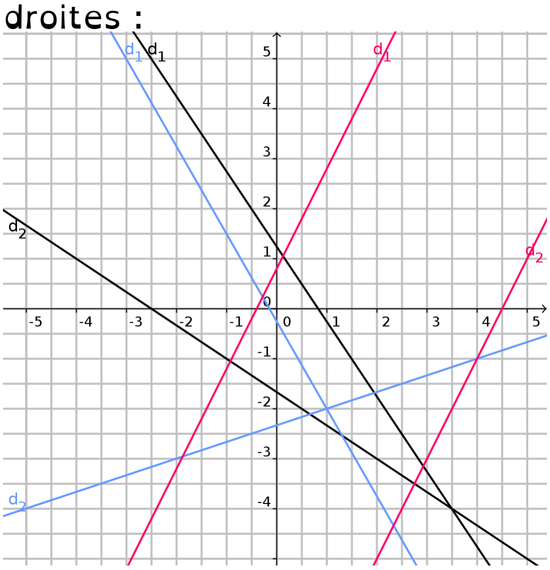
4. Calcule la valeur de a pour que les droites d_1 et d_2 soient parallèles

   $a = -1$

5. Calcule la valeur de a pour que les droites d_1 et d_2 soient perpendiculaires

   $a = -\dfrac{3}{2}$ ou $a = 1$

6. Trouve, graphiquement et par calcul, l'éventuel point d'intersection des droites :



   (a) $\left(\dfrac{7}{2}; -4\right)$

   (b) $(1; -2)$

   (c) Pas de point d'intersection : d_1 et d_2 sont parallèles.

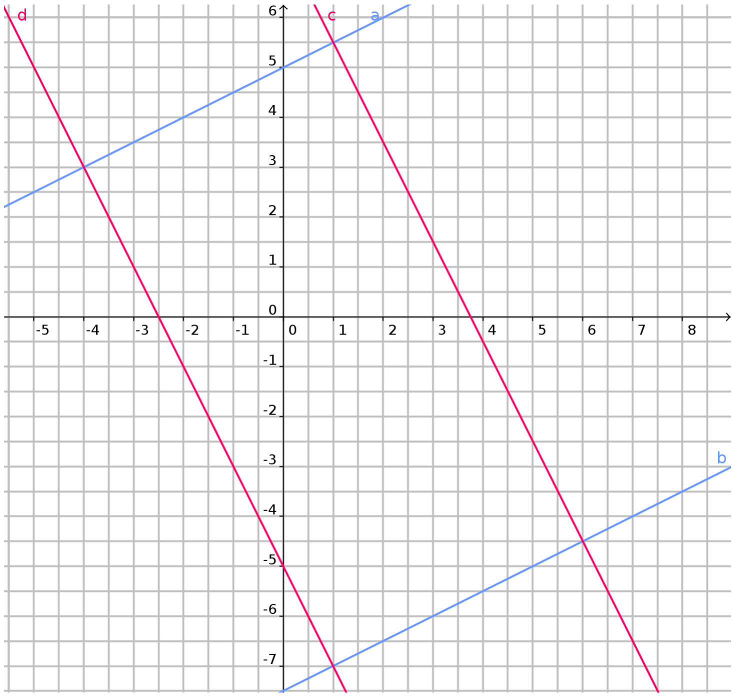
7. Voici les équations cartésiennes de 4 droites a, b, c et d.

   $a \equiv \dfrac{1}{2}x - y + 5 = 0$
   $b \equiv x - 2y - 15 = 0$
   $c \equiv 4x + 2y - 15 = 0$
   $d \equiv 2x + y + 5 = 0$

4

(a)

$y = mx + p$	m	p
$a \equiv y = \frac{1}{2}x + 5$	$\frac{1}{2}$	5
$b \equiv y = \frac{1}{2}x - \frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{2}$
$c \equiv y = -2x + \frac{15}{2}$	-2	$\frac{15}{2}$
$d \equiv y = -2x - 5$	-2	-5

(b) 

(c) La figure formée par les droites a, b, c et d est un rectangle : $a//b$ (pente $\frac{1}{2}$), $c//d$ (pente -2) et $a \perp c$ (-2 est l'opposé de l'inverse de $\frac{1}{2}$).

(d) $a \cap c : A\left(1; \frac{11}{2}\right)$, $a \cap d : D\,(-4; 3)$, $b \cap c : B\left(6; -\frac{9}{2}\right)$ et $b \cap d : C\,(1; -7)$.

(e) $AC \equiv x = 1$ et $BD \equiv y = -\frac{3}{4}x$.

(f) $\left(1; -\frac{3}{4}\right)$

8. Recherche les coordonnées du milieu de $[AB]$ et celles d'un autre point de la droite AB.

(a) $M\left(\frac{5}{2}; -3\right)$ $\quad X\,(1; 3)$ $\quad$ Les coordonnées de X sont obtenues avec $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AB}$.

(b) $M\left(2; \frac{3}{2}\right)$ $\quad X\,(2; -15)$

(c) $M\,(0; 0)$ $\quad X\,(-6; 15)$

(d) $M\left(\frac{5}{8}; -\frac{1}{6}\right)$ $\quad X\left(1; -\frac{5}{3}\right)$

9. Rechercher une équation de la médiatrice de $[AB]$

   (a) $m_{[AB]} \equiv y = \frac{1}{4}x - \frac{29}{8}$

   (b) $m_{[AB]} \equiv y = \frac{3}{2}$

   (c) $m_{[AB]} \equiv y = \frac{2}{5}x$

   (d) $m_{[AB]} \equiv y = \frac{1}{4}x - \frac{31}{96}$

10. Le triangle $A(-5;3)$ $B(-1;1)$ $C(-3;-5)$

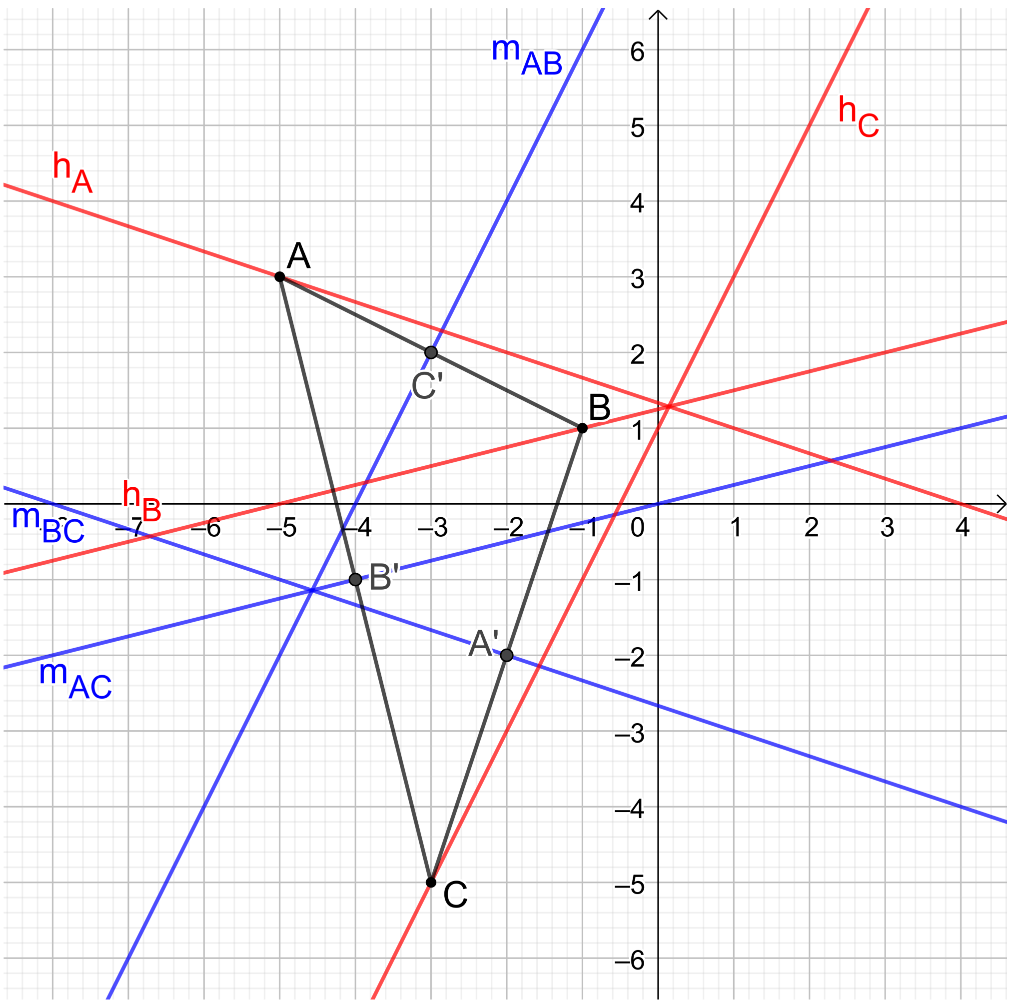
   (a) $C'(-3;2)$, $A'(-2;-2)$ et $B'(-4;-1)$.

   (b) $m_{[AB]} \equiv -2x + y - 8 = 0$ $\quad m_{[BC]} \equiv x + 3y + 8 = 0$ $\quad m_{[CA]} \equiv x - 4y = 0$

   (c) $CCC\left(-\frac{32}{7}; -\frac{8}{7}\right)$

   (d) $h_A \equiv x + 3y - 4 = 0$ $\quad h_B \equiv x - 4y + 5 = 0$ $\quad h_C \equiv -2x + y - 1 = 0$

   (e) $ortho\left(\frac{1}{7}; \frac{9}{7}\right)$



   (f) $AA' \equiv y = -\frac{5}{3}x - \frac{16}{3}$ $\quad BB' \equiv y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ $\quad CC' \equiv x = -3$

(g) $G\left(-3;-\frac{1}{3}\right)$

11. Détermine l'équation explicite des droites suivantes.

(a) $a \equiv y=-\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}$

(b) $b \equiv y=-x+2$

(c) $c \equiv y=-1$

(d) $d \equiv y=-3x+7$

(e) $e \equiv y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$

(f) $f \equiv y=\frac{1}{8}x-3$

(g) $g \equiv x=2$

(h) $h \equiv y=-5x-13$

(i) $i \equiv y=-\frac{7}{4}x-1$

(j) $j \equiv y=-\frac{1}{3}x$

(k) $k \equiv y=-5$

(l) $l \equiv x=10$

12. Trouve graphiquement, puis par calcul, l'éventuel point d'intersection des droites suivantes.

(a) $\left(\frac{8}{5};\frac{1}{8}\right)$

(b) $\left(-\frac{2}{13};\frac{7}{13}\right)$

(c) Pas de point d'intersection : droites parallèles distinctes

13. Recherche une équation de la médiatrice de $[AB]$ lorsque

(a) $y=x-3$

(b) $y=3x-8$

4.5 Distance entre un point et une droite

A retenir

Lorsque le mathématicien parle de distance, il s'agit de la plus courte distance.

Propriété

La distance entre deux points A et B est la longueur du segment $[AB]$ qui les relie.

Cette distance se note $\overline{AB}$ ou $dist(A, B)$.

C'est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

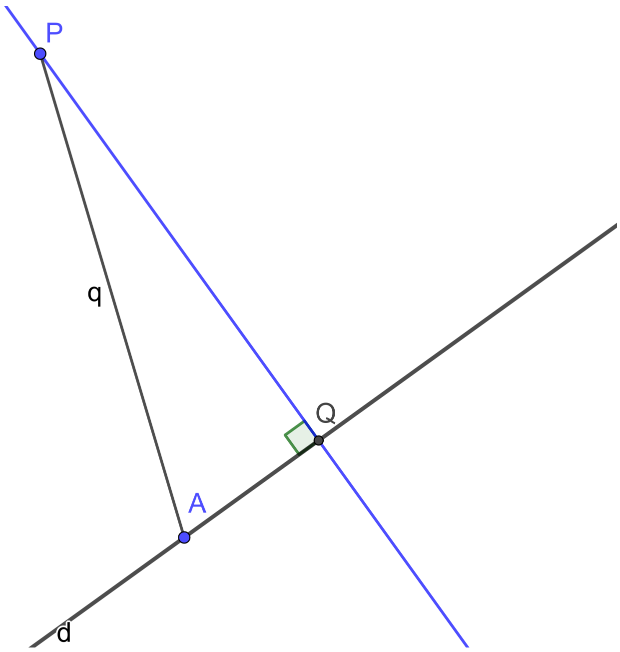
Définition

Soient un point P et une droite d du plan. La distance entre le point P et la droite d est la plus courte distance qui sépare le point de la droite.

Propriété

La plus courte distance entre le point P et la droite d est la distance entre P et le point Q, pied de la perpendiculaire abaissée de P sur d.

Démonstration



Prenons un autre point de la droite d, le point A sur la figure.

Le côté AP du triangle APQ est plus grand que le côté PQ car il est opposé à un plus grand angle.

Définition

Le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur d est appelé le **projeté orthogonal** de P sur d.

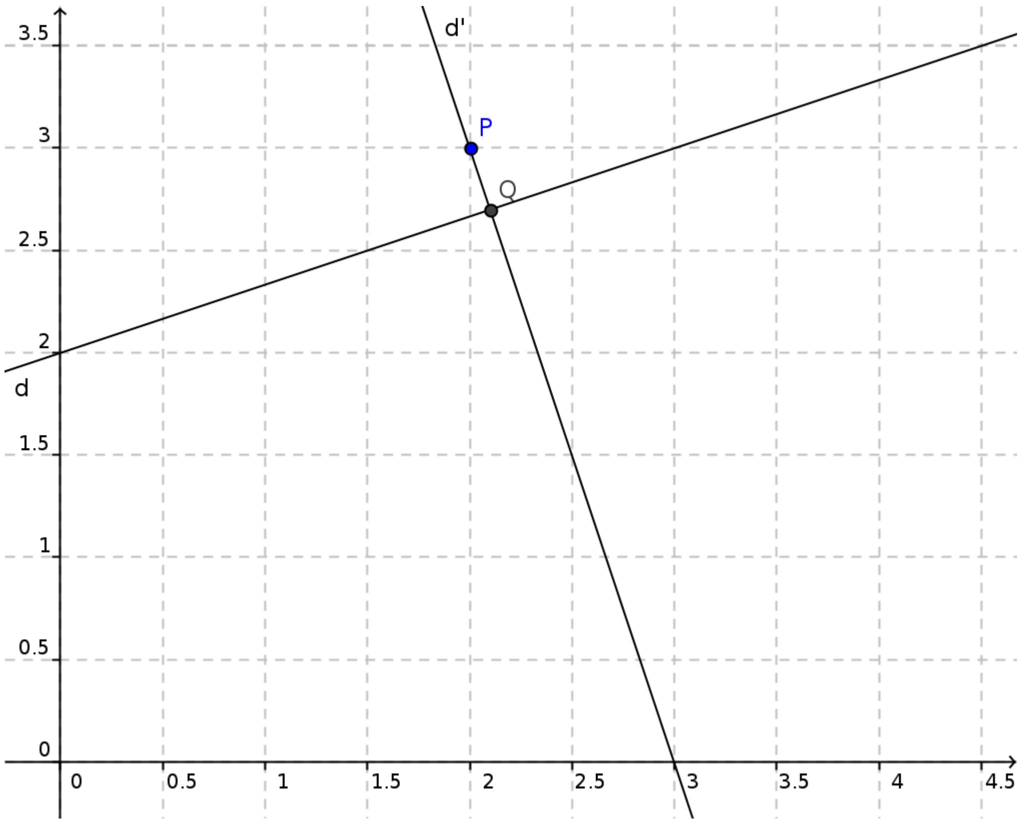
Réponse aux exercices

1. Détermine la distance séparant les points A et B.

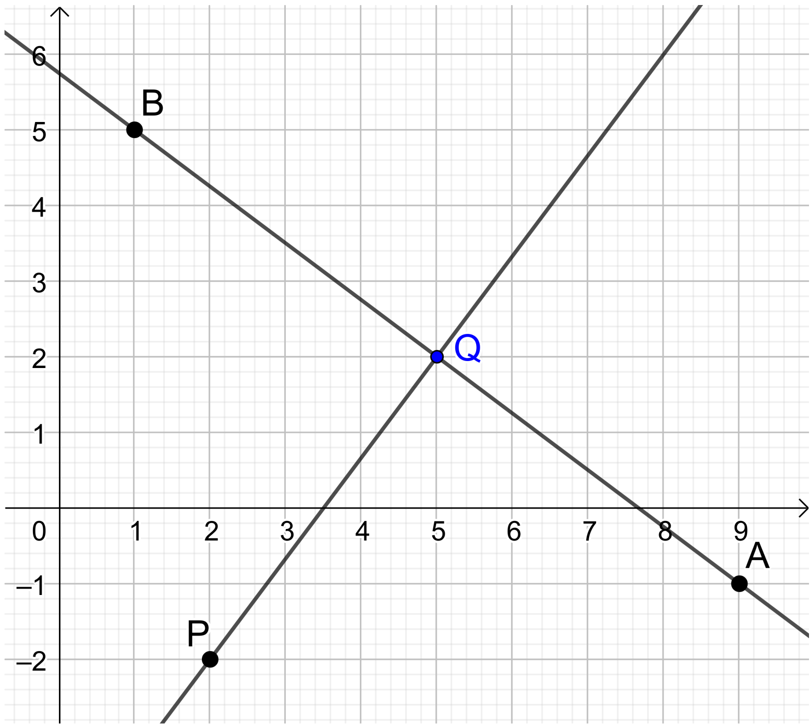
   (a) $2\sqrt{5}$

   (b) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

2. $d' \equiv y = -3x + 9$ $\quad Q\left(\frac{21}{10}; \frac{27}{10}\right)$ $\quad dist\,(P, d) = \frac{\sqrt{10}}{10}$



3. Calcule la distance séparant le point $P(2; -2)$ de la droite d contenant les points $A\,(9; -1)$ et $B\,(1; 5)$. Représente la situation.



$\overrightarrow{AB}\,(-8;6)$ pente $-\dfrac{3}{4}$ pente de la perpendiculaire $\dfrac{4}{3}$

$PQ \equiv y = \frac{4}{3}x + p$ $\quad -2 = \dfrac{8}{3} + p \Rightarrow p = -\dfrac{14}{3}$ $\quad PQ \equiv y = \frac{4}{3}x - \frac{14}{3}$

$$Q\left\{\begin{array}{c} y = -\frac{3}{4}x + \frac{23}{4} \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{14}{3} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{4}{3}x - \frac{14}{3} = -\frac{3}{4}x + \frac{23}{4} \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{14}{3} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{25}{12}x = \frac{125}{12} \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{14}{3} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5 \\ y = \frac{20}{3} - \frac{14}{3} \end{array}\right.$$

$Q\,(5;2)$

La distance entre le point P et la droite d est $\overline{PQ} = \sqrt{(5-2)^2 + (2+2)^2} = 5$

4. $BC \equiv y = -2x + 1$ $\quad d' \equiv y = \dfrac{1}{2}x + 4$ $\quad Q\left(-\dfrac{6}{5}; \dfrac{17}{5}\right)$ $\quad dist\,(A;BC) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4.6 Parabole et cercle

Dans tout cette section, le repère est orthonormé.

A retenir

Définition

On appelle lieu tout ensemble de points (du plan ou de l'espace) qui ont une caractéristique ou une propriété commune.

La parabole

Définition

On appelle parabole $\mathcal{P}$ le lieu des points du plan situés à égale distance d'une droite et d'un point qui n'appartient pas à cette droite.

La droite donnée est appelée directrice et le point donné est appelé foyer de la parabole.

Propriétés de la parabole

1. La parabole admet un axe de symétrie s : la droite passant par F et perpendiculaire à d.
2. On appelle sommet S de la parabole le point d'intersection de la parabole avec son axe de symétrie.

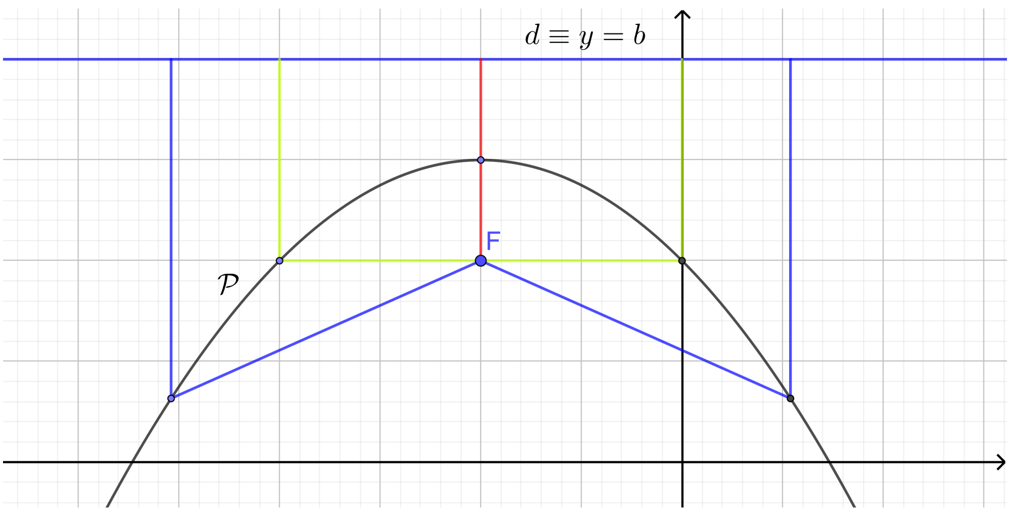
   Ce point est à mi-distance entre F et d. C'est le point de la parabole situé le plus près du foyer et de la directrice.

NB

Dans ce cours nous ne travaillerons qu'avec des directrices horizontales (parallèles à l'axe Ox).

L'axe de symétrie sera donc vertical (parallèle à l'axe Oy).

Équation de la parabole



Les coordonnées du foyer sont $F(x_F; y_F)$

et l'équation de la directrice $d \equiv y = b$.

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow dist\,(P;F) = dist\,(P;d)$

$P\,(x;y) \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2} = |b-y|$

La distance entre le point et la directrice horizontale se mesure sur l'axe vertical.

Après élévation au carré : $(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 = (b-y)^2$

Propriété

En effectuant les carrés, les termes en y² se simplifie.

Ainsi, toute parabole dont la directrice est parallèle à l'axe des abscisses a une équation du type

$y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Intersection entre une droite et une parabole

Le point $P\,(x;y)$ appartient à la parabole ssi son équation est vraie.

Le point $P\,(x;y)$ appartient à la droite ssi son équation est vraie.

Le point $P\,(x;y)$ appartient aux deux ssi le **système** formé des deux équations est vrai.

Le cercle

Définition

Le cercle $\mathcal{C}$ est le lieu des points du plan

situés à égale distance d'un point fixe appelé centre.

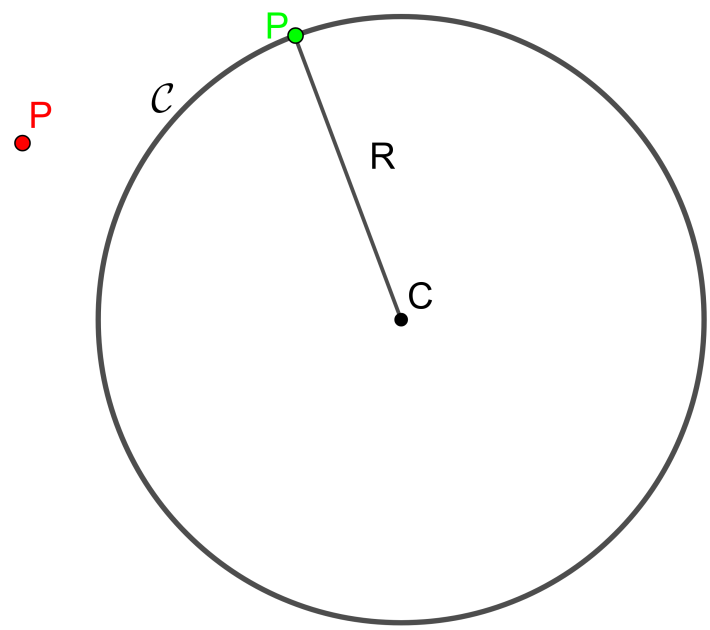
La distance est appelée rayon R du cercle.

Équation du cercle

Soit le cercle de centre $C(x_C;y_C)$ et de rayon $R>0$.

Désignons par $P(x;y)$ un point quelconque du plan.

$P\,(x;y)$ appartient au cercle si et seulement si $dist\,(C;P) = R$.



$\mathcal{C} \equiv (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$ est la forme canonique de l'équation du cercle de centre $C(x_C; y_C)$ et de rayon R.

Cas particulier

Si le centre du cercle est $C(0; 0)$ et son rayon R, alors l'équation devient $x^2 + y^2 = R^2$.

Forme développée

Effectuons les carrés dans l'équation canonique du cercle :

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x.x_C + x_C^2 + y^2 - 2y.y_C + y_C^2 = R^2$

$x^2 - 2x_C.x + x_C^2 + y^2 - 2y_C.y + y_C^2 = R^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x_C.x + y^2 - 2y_C.y = R^2 - x_C^2 - y_C^2$

$\mathcal{C} \equiv x^2 - 2x_C.x + y^2 - 2y_C.y = R^2 - x_C^2 - y_C^2$

est la forme développée de l'équation du cercle.

Centre et rayon au départ de la forme développée

Pouvoir obtenir le centre et le rayon du cercle à partir de la forme dévelop-pée, observons.

La forme de l'équation est

$\mathcal{C} \equiv x^2 + a.x + y^2 + b.y = c$

où $\left\{ \begin{array}{l} a = -2x_C \\ b = -2y_C \end{array} \right.$

et c est une différence de trois carrés : $c = R^2 - x_C^2 - y_C^2$.

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} x_C = -\dfrac{a}{2} \\ y_C = -\dfrac{b}{2} \end{array} \right.$

Maintenant qu'on a trouvé le centre, il suffit d'utiliser
$R^2 = c + x_C^2 + y_C^2$ pour trouver R.

Exemple

Voici l'équation développée d'un cercle : $x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$.
Visiblement, $a = 4$, $b = -6$ et $c = 3$.
On a donc $\begin{cases} x_C = -2 \\ y_C = 3 \end{cases}$. Le centre est $C\,(-2; 3)$.
$R^2 = 3 + 4 + 9$. Nous trouvons $R = 4$.

Intersection entre une droite et un cercle

Le point $P\,(x; y)$ appartient au cercle ssi son équation est vraie.
Le point $P\,(x; y)$ appartient à la droite ssi son équation est vraie.
Le point $P\,(x; y)$ appartient aux deux ssi le **système** formé des deux équations est vrai.

Tangente à un cercle

La tangente en un point du cercle est la droite perpendiculaire au rayon passant par ce point.

Réponse aux exercices

1. Détermine une équation cartésienne des paraboles suivantes et construis-les. On donne la directrice et le foyer.

   NB

   Les dessins ont été réalisés à l'aide de

   https ://www.geogebra.org/classic/h3gvj4jh

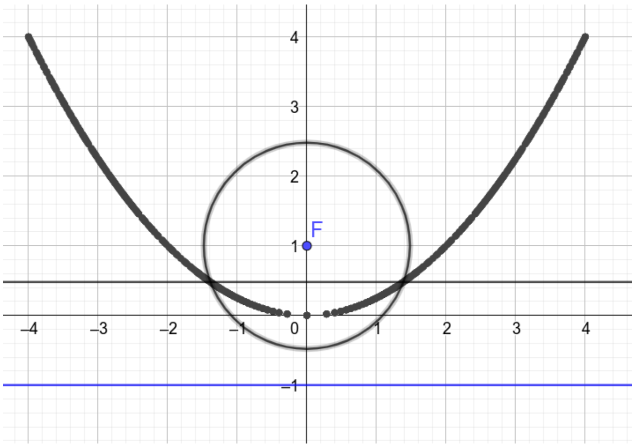
   Pour l'utiliser, il faut préciser les coordonnées du foyer F

   et l'équation de la directrice $y = b$ en indiquant la valeur de b (-1 dans le premier exercice).

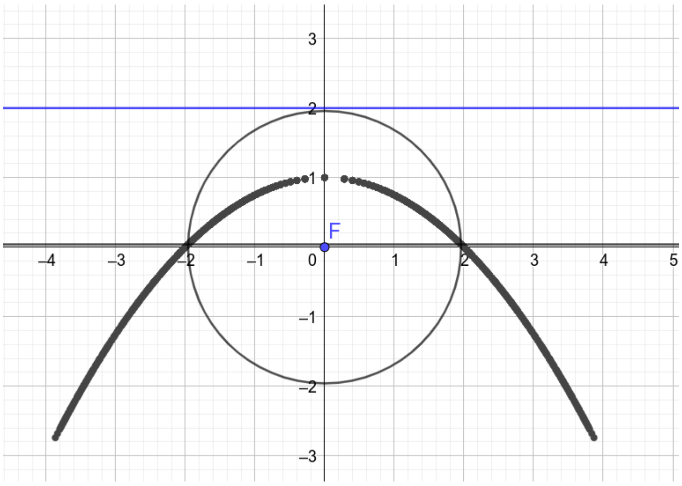
Petite subtilité : la génératrice g a comme équation $y = r - b$ ou $y = b - r$ suivant l'exercice. A toi de faire le bon choix.

Tout logiciel a ses limites : il manque souvent quelques points au voisinage du sommet de la parabole.

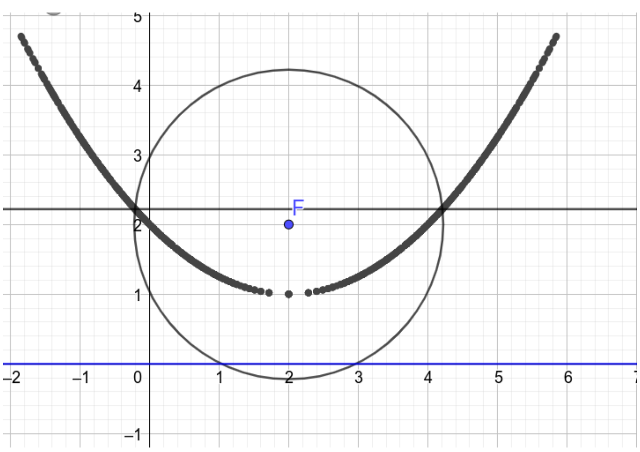
(a) $y = \dfrac{x^2}{4}$



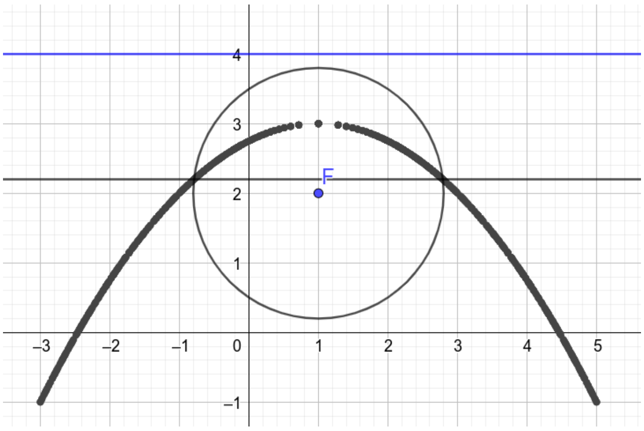
(b) $y = -\dfrac{x^2}{4} + 1$



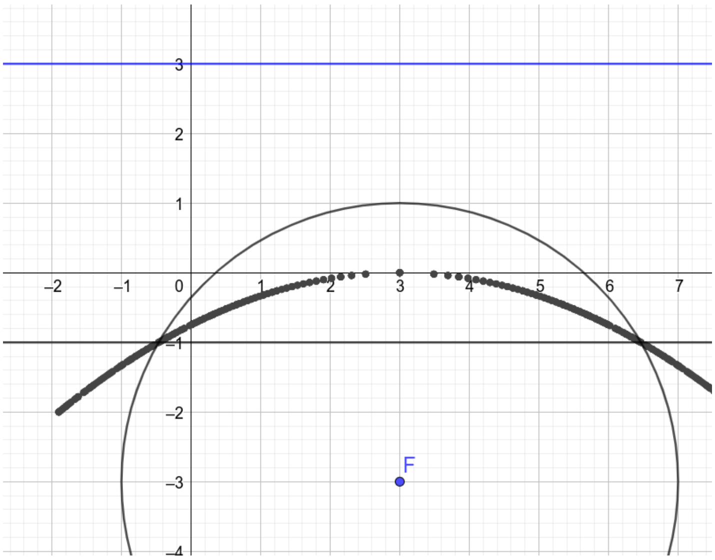
(c) $y = \dfrac{x^2}{4} - x + 2$



(d) $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{11}{4}$



(e) $y = -\frac{x^2}{12} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$



2. On donne la directrice et le foyer de trois paraboles. Pour chacune,
détermine une équation cartésienne,
détermine son sommet,
détermine 3 paires de points symétriques,
trace son graphique.

(a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 3$

$S\,(0;3)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{15}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{4}$	3	$\frac{13}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{4}$

(b) $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$

$S(-1;2)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{7}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$

(c) $y = -\frac{1}{6}x^2 + x + 2$

$S\left(3;\frac{7}{2}\right)$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	$\frac{17}{6}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{17}{6}$	2

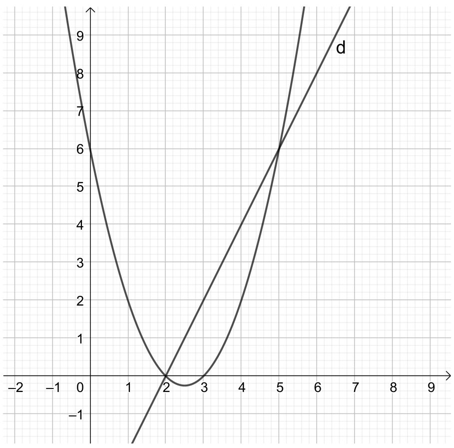
Détails : http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/geometrie

4

Les trois exercices suivants concernent l'intersection entre une droite et une parabole.

3. Soient la droite $d \equiv y = 2x - 4$ et la parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 - 5x + 6$. Recherche, par calcul, les coordonnées des éventuels points d'intersection entre la droite et la parabole.

   $A(2;0)$ et $B(4;6)$

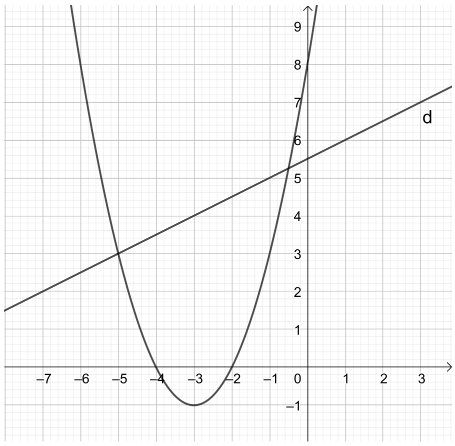


4. Considérons la parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 + 2mx + 8$.

   (a) $m = 3$ $\quad \mathcal{P} \equiv y = x^2 + 6x + 8$

   (b) $d \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

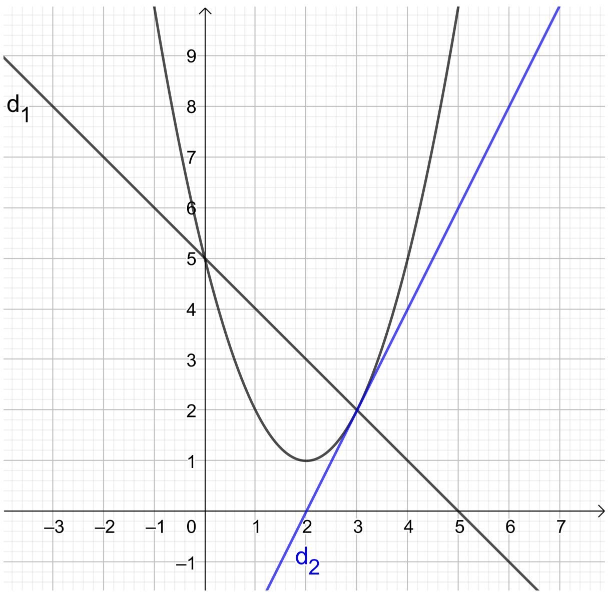
   (c) $A(-5;3)$ et $B\left(-\frac{1}{2};\frac{21}{4}\right)$



5. Soient la parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 - 4x + 5$ et les droites $d_1 \equiv y = -x + 5$ et $d_2 \equiv y = 2x - 4$.

   (a) $\mathcal{P} \cap d_1 : (0; 5)$ *et* $(3; 2)$

   (b) $\mathcal{P} \cap d_2 : (3; 2)$



Note que d_2 est tangente à la parabole.

6. Les équations suivantes représentent un cercle.

   Donnes-en le centre et le rayon.

   (a) $C(3; -2)$ et $R = \sqrt{13}$

   (b) $C(0; 0)$ et $R = \sqrt{7}$

   (c) $C(4; -3)$ et $R = \sqrt{46}$

   (d) $C(-1; 2)$ et $R = 5$

   (e) $C(0; 2)$ et $R = 2$

   (f) $C(-1; 0)$ et $R = 5$

   (g) $C(-4; 1)$ et $R = 9$

(h) $C(0;1)$ et $R = \frac{\sqrt{30}}{3}$

(i) $C(-\frac{1}{2};\frac{3}{10})$ et $R = \frac{\sqrt{34}}{10}$

7. Détermine une équation des cercles suivants :

   (a) $\mathcal{C} \equiv (x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$

   (b) $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 = 2$

   (c) $\mathcal{C} \equiv (x-5)^2 + y^2 = 25$

   (d) $\mathcal{C} \equiv \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{41}{4}$

8. Dans un repère orthonormé, détermine, pour chacun des cercles suivants, une équation de la tangente au point $A(3;4)$.

   Vérifie d'abord que A appartient bien au cercle en question.

   (a) $t_A \equiv y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

   (b) $t_A \equiv x = 3$

   (c) $t_A \equiv y = \frac{x}{5} + \frac{17}{5}$

   (d) $t_A \equiv y = -3x + 13$

   Détails : http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/geometrie

9. $\mathcal{C} \equiv (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

   Détails : http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/geometrie

10. $\mathcal{C} \equiv (x+7)^2 + (y-1)^2 = 169$

   Détails : http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/geometrie

Les trois exercices suivants concernent l'intersection entre une droite et un cercle.

11. Détermine pour chacun des cercles suivants, par dessin puis par calcul, les éventuels points d'intersection avec les axes du repère.

   (a) $\mathcal{C} \cap Ox : (-4 \pm \sqrt{21};0)$ $\quad \mathcal{C} \cap Oy : (0;5)\ (0;-1)$

   (b) $\mathcal{C} \cap Ox : (2 \pm \sqrt{22};0)$ $\quad \mathcal{C} \cap Oy : (0;\pm 3\sqrt{2})$

   (c) $\mathcal{C} \cap Ox = \emptyset$ $\quad \mathcal{C} \cap Oy : (0;-3 \pm \sqrt{3})$

   (d) $\mathcal{C} \cap Ox = \emptyset$ $\quad \mathcal{C} \cap Oy : (0;4 \pm 2\sqrt{3})$

4

12. $(-1;-5)$ et $(6;2)$

13. $\left(2\sqrt{3};1+2\sqrt{3}\right)$ et $\left(-2\sqrt{3};1-2\sqrt{3}\right)$

Chapitre 5

Deuxième degré

5.0 Prérequis

A retenir

Produits remarquables

Formules	Exemples
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(3+2x)^2 = (3)^2 + 2.(3).(2x) + (2x)^2 = 9 + 12x + 4x^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(3y-5)^2 = (3y)^2 - 2.(3y).(5) + (5)^2 = 9y^2 - 30y + 25$
$(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$	$(4x-5y).(4x+5y) = (4x)^2 - (5y)^2 = 16x^2 - 25y^2$

Factorisation

La factorisation consiste à transformer une somme en un produit de facteurs.

1. La mise en évidence de facteurs communs

Formules

$ab + ac = a.(b+c)$

$ab - ac = a.(b-c)$

$ab + ac - ad = a.(b+c-d)$

Exemples

$2ax - 5bx = x.(2a-5b)$

$5x^2y^3 - 15xy^4 + 10xy^3 = 5xy^3.(x-3y+2)$

$2.(a-b).x - 3.(a-b).y = (a-b).(2x-3y)$

2. Les produits remarquables

Pour cette deuxième étape, on regarde si on a affaire à une éventuelle **différence** de **deux carrés** $a^2 - b^2$ ou à un **carré parfait** $a^2 \pm 2ab + b^2$.

On utilise alors les formules des **produits remarquables** à l'envers.

$$a^2 - b^2 = (a - b) . (a + b)$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Exemples

- $x^2 - 9 = (x - 3) . (x + 3)$
- $4a^2 - 9b^2 = (2a - 3b) . (2a + 3b)$
- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
- $12x^2 - 3y^2 = 3. (4x^2 - y^2) = 3. (2x - y) . (2x + y)$

Il n'existe pas de formule pour une somme de deux carrés. Un tel cas de figure est infactorisable !

Exemple

$x^2 + 4$ est infactorisable car somme de deux carrés.

• Les groupements

Cette troisième technique peut s'avérer utile lorsque l'expression à factoriser est composée de minimum **4 termes**, comme ci-dessous.

Exemple

$3ax - 3ay + x^2 - xy = (3ax - 3ay) + (x^2 - xy)$

$= 3a. (x - y) + x. (x - y)$

$= (x - y) . (3a + x)$

• Division du polynôme par $x - a$

Diviser un polynôme $P(x)$ par $x - a$ consiste à l'écrire sous la forme

$P(x) = (x - a) .Q(x) + R$,

où R est un nombre (le reste) et $Q(x)$ un polynôme (le quotient).

$(x - a) .Q(x) + R$, ce n'est pas un produit ! Pour factoriser, il faut que $R = 0$.

Loi du reste

$$P(a) = R$$

Conséquence

Si $P(a) = 0$, alors $R = 0$ et $P(x) = (x - a) .Q(x)$.

Le polynôme est donc factorisé dans ce cas.

Il reste à deviner a... Une méthode qui en vaut une autre consiste à tester les diviseurs du terme indépendant.

Exemple

Factorisation du polynôme $P(x) = 5x^3 - 11x^2 - x + 6$.

Le terme indépendant est 6 et ses diviseurs sont ± 1 , ± 2 et ± 3.

La valeur de a à deviner est souvent ± 1, ± 2 ou ± 3.

$P(1) = 5.1^3 - 11.1^2 - 1 + 6 = -1$. Le reste n'est pas nul.

Pas de factorisation par $x - 1$.

$P(-1) = 5.(-1)^3 - 11.(-1)^2 + 1 + 6 = -9$. Le reste n'est pas nul.

Pas de factorisation par $x + 1$.

$P(2) = 5.2^3 - 11.2^2 - 2 + 6 = 40 - 44 - 2 + 6 = 0$.

Le reste est nul. Division par $x - 2$.

$5x^3 - 11x^2 - x + 6 = (x - 2).Q(x)$

	5	-11	-1	6
2		10	-2	-6
	5	-1	-3	0

$$Q(x) = 5x^2 - x - 3$$

$$5x^3 - 11x^2 - x + 6 = (x - 2).\left(5x^2 - x - 3\right)$$

Réponse aux exercices

1. Effectue et réduis les termes semblables.

   (a) $(2x + 1).(3x - 2) = 6x^2 - x - 2$

   (b) $(2x - a).(2a - 3x) = 7ax - 2a^2 - 6x^2$

   (c) $\left(x - \frac{1}{2}\right).\left(\frac{3}{2} - 2x^2\right) = -2x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

   (d) $3.\left(\frac{x}{3} - 2\right) - 2.\left(\frac{x}{2} + 4\right) = -14$

   (e) $3.(x - 2) + 5.(x + 1).(2x - 3) = 10x^2 - 2x - 21$

   (f) $[2x - (x + 1)] - 2.(x - 2).(x + 3) = -2x^2 - x + 11$

2. Reconnais le (ou les) produits remarquables à utiliser, effectue ensuite la formule et réduis les éventuels termes semblables :

   (a) $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

   (b) $(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

   (c) $(x - 2).(x + 2) = x^2 - 4$

(d) $(3k+2).(3k-2).(9k^2+4)=81k^4-16$

(e) $(6a^2x^3-3ax)^2=36a^4x^6-36a^3x^4+9a^2x^2$

(f) $(-2a+1)^2=4a^2-4a+1$

(g) $\left(\frac{a^2}{3}+\frac{2b}{5}\right).\left(\frac{a^2}{3}-\frac{2b}{5}\right)=\frac{a^4}{9}-\frac{4b^2}{25}$

(h) $(-2a^2-7x^2)^2=4a^4+28a^2x^2+49x^4$

(i) $(-5c+2a).(2a+5c)=4a^2-25c^2$

(j) $(2x-3y).(3x+2y)+2.(x-y)^2=8x^2-4y^2-9xy$

(k) $(5y-6x).(5y+6x)-(-3y+2x)^2=-40x^2+12xy+16y^2$

3. Factorise le plus finement possible les expressions suivantes :

(a) $3xy+3xz=3x.(y+z)$

(b) $36xy^2+9x^2y-27xy=9xy.(4y+x-3)$

(c) $4a^2-25b^2=(2a-5b).(2a+5b)$

(d) $(x-1).(x+2)+(x-1).(x+3)=(x-1).(2x+5)$

(e) $x^3-16x=x.(x-4).(x+4)$

(f) $(2x+3)^2-49=(2x-4).(2x+10)=4.(x-2).(x+5)$

(g) $x^2+9\, infactorisable$

(h) $(7x+6).(3x-5)-(3x-5)=(3x-5).(7x+5)$

(i) $4x^2-28x+49=(2x-7)^2$

(j) $(x-1)^2-(2x-3)^2=(3x-4).(-x+2)$

(k) $12ab-15b^2+24ay-30by=3.(4a-5b).(b+2y)$

(l) $2x^3+5x^2-2x-5=(2x+5).(x-1).(x+1)$

(m) $5x^4-20x^2=5x^2.(x-2).(x+2)$

(n) $x^4-16=(x-2).(x+2).(x^2+4)$

(o) $x^3-2x^2-9x+18=(x-2).(x-3).(x+3)$

(p) $4.(x-1)-3.(x-1)^2=(x-1).(7-3x)$

(q) $3a.(x-4)-2b.(4-x)=(x-4).(3a+2b)$

(r) $x^2.(a-b)+4.(b-a)=(a-b).(x-2).(x+2)$

(s) $4x^3-12x^2+9x=x.(2x-3)^2$

(t) $(2x-7).(x+4)-(4x+1).(4+x)=-2.(x+4)^2$

(u) $3x^2+5x+2=(x+1).(3x+2)$

(v) $2x^3+7x^2+2x-3=(x+1).(x+3).(2x-1)$

5

(w) $2x^3 - 8x^5 - 1 + 4x^2 = (2x^3 - 1) . (1 - 2x) . (1 + 2x)$

(x) $2x^4 - 10x^3 + 16x^2 - 8x = 2x. (x - 1) . (x - 2)^2$

(y) $x^3 - 19x + 30 = (x - 2) . (x - 3) . (x + 5)$

(z) $2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9 = (x - 1) . (x - 3) . (x + 3) (2x + 1)$

5.1 Fonction du deuxième degré

A retenir

Définition

• La fonction f est du deuxième degré si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Théorème

• $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + v$

où $v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Exemple

$f(x) = 2x^2 + 20x + 35$	
$f(x) = 2\left(x^2 + 10x + \frac{35}{2}\right)$	Mise en évidence de a
$f(x) = 2\left[x^2 + 10x + 25 - 25 + \frac{35}{2}\right]$	Compléter le carré et compenser cet ajout
$f(x) = 2\left[(x + 5)^2 - 25 + \frac{35}{2}\right]$	Former le carré parfait
$f(x) = 2\left[(x + 5)^2 - \frac{15}{2}\right]$	Réduction des deux derniers termes au même dénominateur
$f(x) = 2(x + 5)^2 - 15$	Redistribution de a

Démonstration

5

	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Mise en évidence de a	$f(x) = a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$
Compléter le carré et compenser cet ajout	$f(x) = a.\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$
Former le carré parfait	$f(x) = a.\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$
Réduction des deux derniers termes au même dénominateur	$f(x) = a.\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$
Redistribution de a	$f(x) = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

Ce qui donne la forme $f(x) = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + v$.

Nous voyons donc que toute fonction du deuxième degré peut être construite en partant de la fonction de référence $y = x^2$ via les $3,5$ transformations suivantes :

1. une translation horizontale de $-\frac{b}{2a}$ unités,
2. une déformation verticale de coefficient $|a|$ (avec symétrie d'axe Ox si $a < 0$),
3. une translation verticale de $v = \frac{4ac - b^2}{4a}$ unités.

Un point $(x; y)$ de la parabole $y = ax^2$ sera donc transformé en $\left(x - \frac{b}{2a}; ay + \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

En notant $\rho = b^2 - 4ac$,

un point $(x; y)$ de la parabole $y = x^2$ sera donc transformé en $\left(x - \frac{b}{2a}; ay - \frac{\rho}{4a}\right)$.

Conséquences importantes pour la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

1. L'axe de la fonction a comme équation $x = -\frac{b}{2a}$.
2. Le sommet de la parabole a comme coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\rho}{4a}\right)$.
3. A la deuxième étape (déformation verticale de coefficient $|a|$), si $a > 0$ la parabole reste « souriante » et si $a < 0$ la parabole devient « triste ».

5

Étude et représentation graphique d'une fonction du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

1. Équation de l'axe de symétrie $\quad x = -\dfrac{b}{2a}$
2. Coordonnées du sommet $\quad \left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\rho}{4a}\right)$
3. Variation
   (a) Si $a > 0$

x		$-\dfrac{b}{2a}$	
$a.x^2 + bx + c$	$\searrow$	m	$\nearrow$

   la parabole est « souriante »

   (b) Si $a < 0$

x		$-\dfrac{b}{2a}$	
$a.x^2 + bx + c$	$\nearrow$	M	$\searrow$

   la parabole est « triste ».

Méthode

1. Calculer $-\dfrac{b}{2a}$, ce qui donnera une équation de l'axe de symétrie et la première coordonnée du sommet.
2. Déterminer le tableau de variation (avec le signe de a).
3. Chercher des points (symétriques) de part et d'autre du sommet.
4. Tracer le graphique.

En un mot, calculer $-\dfrac{b}{2a}$, chercher des points symétriques et c'est (presque) fait !
Je vérifie aussi la point $(0; c)$.

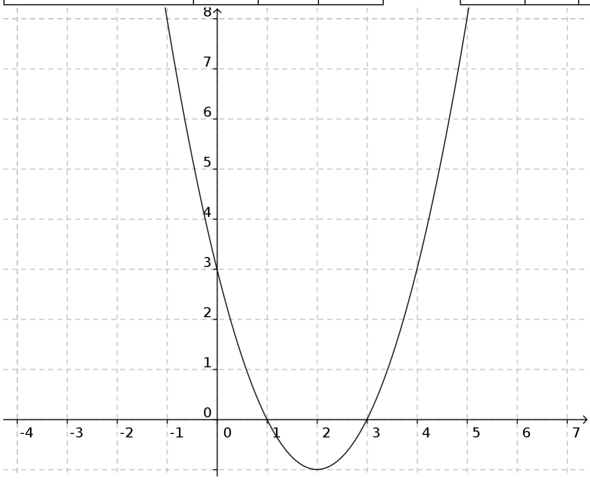
Réponse aux exercices

Étudie et représentez la fonction f.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $\quad -\dfrac{b}{2a} = 2$ $\quad \rho = 4$ $\quad Axe \equiv x = 2$ $\quad$ **Sommet**$(2; -1)$

x		2	
$x^2 - 4x + 3$	$\searrow$	m	$\nearrow$

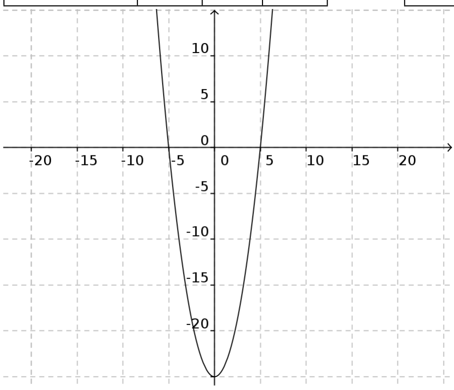
-1	0	1	2	3	4	5
8	3	0	-1	0	3	8



2. $f(x) = x^2 - 25$ $\quad -\dfrac{b}{2a} = 0$ $\quad \rho = 100$ $\quad Axe \equiv x = 0$ $\quad$ **Sommet**$(0; -25)$

x		0	
$x^2 - 25$	$\searrow$	m	$\nearrow$

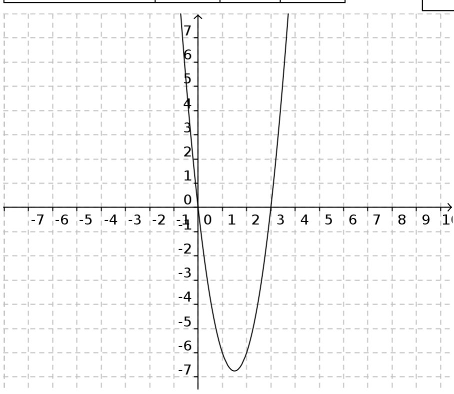
-5	-3	-1	0	1	3	5
0	-16	-24	-25	-24	-16	0



3. $f(x) = 3x^2 - 9x$ $\quad -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$ $\quad \rho = 81$ $\quad Axe \equiv x = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ **Sommet**$\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{27}{4}\right)$

x		$\frac{3}{2}$	
$3x^2 - 9x$	$\searrow$	m	$\nearrow$

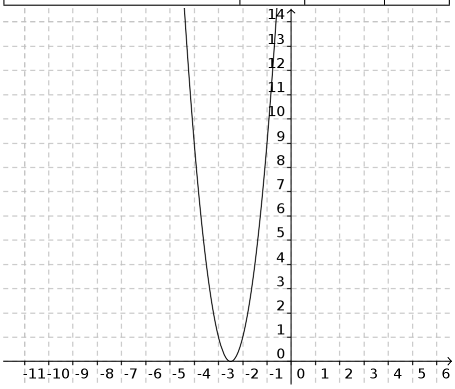
-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
12	-9	-6	$-\frac{27}{4}$	-6	-9	12



4. $f(x) = 4x^2 + 20x + 25$ $\quad -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2}$ $\quad \rho = 0$ $\quad Axe \equiv x = -\dfrac{5}{2}$ $\quad$ **Sommet**$\left(-\dfrac{5}{2}; 0\right)$

x		$-\frac{5}{2}$	
$4x^2+20x+25$	$\searrow$	m	$\nearrow$

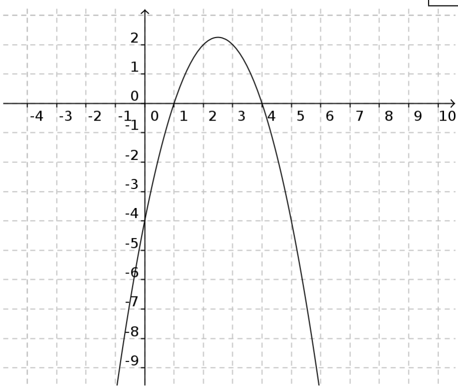
-5	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	0
25	9	1	0	1	9	25



5. $f(x) = -x^2+5x-4 \qquad -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \qquad \rho = 9 \qquad Axe \equiv x = \frac{5}{2}$ Sommet$\left(\frac{5}{2};\frac{9}{4}\right)$

x		$\frac{5}{2}$	
$3x^2-9x$	$\nearrow$	M	$\searrow$

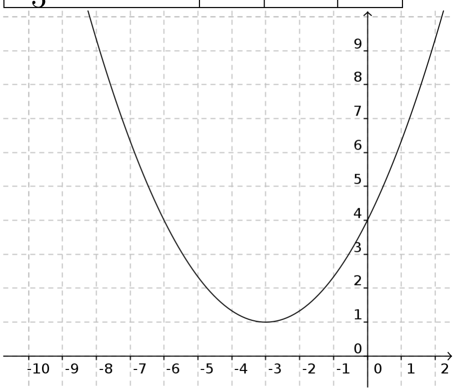
0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
-4	0	2	$\frac{9}{4}$	2	0	-4



6. $f(x) = \frac{x^2}{3}+2x+4 \qquad -\frac{b}{2a} = -3 \qquad \rho = -\frac{4}{3} \qquad Axe \equiv x = -3$ Sommet$(-3;1)$

x		-3	
$\frac{x^2}{3}+2x+4$	$\searrow$	m	$\nearrow$

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
4	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	4



5.2 Fonction du deuxième degré, le retour

A retenir

Si f(x) est donné

1. Calcule $-\dfrac{b}{2a}$, ce qui donnera l'axe de symétrie.
2. Détermine la variation (avec le signe de a).
3. Cherche le point $(0;\ )$.
4. Trouve le graphique.

Réponse aux exercices

1. Associe à chaque fonction du second degré le graphique qui lui convient

f(x)	signe de a	$-\frac{b}{2a}$	$(0;c)$	Graphique
(a)	-	1	$(0;2)$	E
(b)	+	2	$(0;0)$	H
(c)	+	3	$(0;3)$	D
(d)	-	$\frac{3}{2}$	$(0;-3)$	G
(e)	+	-3	$(0;-2)$	B
(f)	-	-1	$(0;-2)$	A
(g)	+	-2	$(0;-1)$	F
(h)	-	$\frac{1}{4}$	$(0;1)$	C

2. $f(x) = x^2 + bx + c$

   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

   (b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

   Détails et graphiques :

   http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/degre2

3. $f(x) = ax^2 - x + c$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 3$

(d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$

(e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

Détails et graphiques :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/degre2

4. $f(x) = ax^2 + bx + 3$

(f) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

(g) $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

Détails et graphiques :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/degre2

5. Le ballon

$f(x) = -475x^2 + 418x + 84$

Détails et graphiques :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/degre2

6. Détermine f(x)

(a) Vu le point $(0;2)$, $c = 2$.

$f(x) = ax^2 + bx + 2$

$-\frac{b}{2a} = 2 \qquad b = -4a \qquad f(x) = ax^2 - 4ax + 2$

$f(2) = -6 \qquad f(2) = a.4 - 4a.2 + 2 = -6 \qquad -4a = -8$

$f(x) = 2x^2 - 8x + 2$

(b) Vu le point $(0;2)$, $c = 2$.

$f(x) = ax^2 + bx + 2$

$-\frac{b}{2a} = 1 \qquad b = -2a \qquad f(x) = ax^2 - 2ax + 2$

$f(1) = 3 \qquad f(1) = a - 2a + 2 = 3 \qquad -a = 1$

$f(x) = -x^2 + 2x + 2$

(c) Vu le point $(0;1)$, $c = 1$.

5

$f(x) = ax^2 + bx + 1$

$-\dfrac{b}{2a} = 2 \qquad b = -4a \qquad f(x) = ax^2 - 4ax + 1$

$f(2) = -1 \qquad f(2) = 4a - 8a + 1 = -1 \qquad -4a = -2$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

(d) Vu le point $(0;3)$, $c = 3$.

$f(x) = ax^2 + bx + 3$

$-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2} \qquad b = -a \qquad f(x) = ax^2 - ax + 3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a + 3 = \frac{7}{2} \qquad -\frac{1}{4}a = \frac{1}{2}$

$f(x) = -2x^2 + 2x + 3$

5.3 Équations et inéquations

5

A retenir

Définition

Une équation du deuxième degré a la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Avec $f(x) = ax^2 + bx + c$, cela revient à $f(x) = 0$.

Propriété

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède 0, 1 ou 2 solutions
suivant le signe de $\rho = b^2 - 4ac$.

Démonstration

$f(x) = ax^2 + bx + c$

peut se réécrire sous la forme

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + p$$

et même (section 5.1) :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$f(x) = 0$ devient donc $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = -\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

ou encore $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4a} \Longleftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

Si $b^2-4ac<0$	Si $b^2-4ac=0$	Si $b^2-4ac>0$
Le premier membre est positif et le second membre est strictement négatif.	$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ $x+\dfrac{b}{2a}=0$	$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$ $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Il n'y a pas de racine.	Il y a une racine.	Il y a deux racines.

Il suffit donc de calculer b^2-4ac pour séparer les trois cas.

On dit que b^2-4ac est le discriminant ou le réalisant.

Notation : $\rho = b^2-4ac$.

Propriétés (rappels)

1. Le carré d'un nombre est toujours positif.
2. Un produit est nul si et seulement si un des facteurs au moins est nul. C'est la règle du produit nul.
   $\boxed{A.B=0 \Longleftrightarrow A=0\, ou\, B=0}$

Définition

Une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ est incomplète ssi $b=0$ ou $c=0$
.

Exemples de résolution

1. $3x^2+5x=0$

   $x.(3x+5)=0$

   $x=0\, ou\, (3x+5)=0$

   $x=0\, ou\, x=-\dfrac{5}{3}$

2. $x^2 - 4 = 0$

$(x-2).(x+2) = 0$

$(x-2) = 0\, ou\ (x+2) = 0$

$x = 2\, ou\, x = -2$

3. $4x^2 + 9 = 0$

$4x^2 = -9$

$x^2 = -\frac{9}{4}$

Pas de solution

4. $4x^2 = 0$

$x^2 = 0$

$x = 0$

5. $(x-2)^2 = 9$

$(x-2) = \pm 3$

$x - 2 = 3\, ou\, x - 2 = -3$

$x = 5\, ou\, x - 2 = -1$

Définition

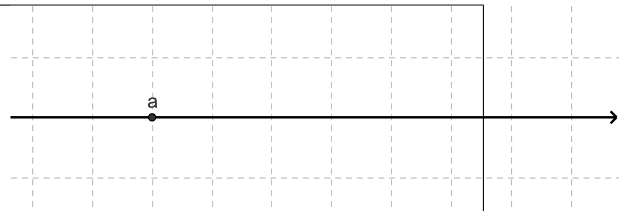
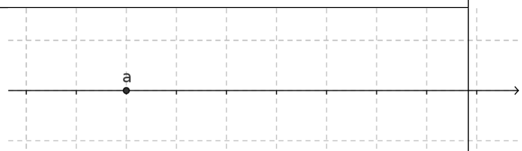
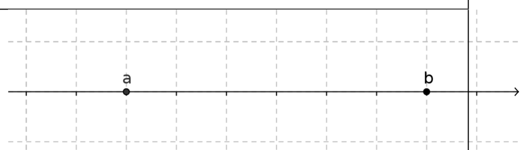
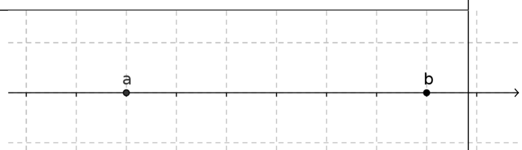
Un trinôme du second degré est un polynôme du type $ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$.

Propriété

Le signe du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est toujours le signe de a sauf entre les racines.

5

Ensembles liés aux inéquations et systèmes d’inéquations

Inéquation	Ensemble	Notation	Interprétation géométrique
$x > a$	Ensemble des nombres réels strictement plus grands que a	$]a;+\infty[$	
$x < b$	Ensemble des nombres réels strictement plus petits que b	$]-\infty;b[$	
$x \geq a$	Ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a	$[a;+\infty[$	
$x \leq b$	Ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à b	$]-\infty;b]$	
$x > a$ et $x < b$ noté $\boxed{a < x < b}$	Ensemble des nombres réels strictement plus grands que a et strictement plus petits que b	$]a;b[$	
$x \geq a$ et $x \leq b$ noté $\boxed{a \leq x \leq b}$	Ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à a et inférieurs ou égaux à b	$[a;b]$	

Définitions

Ces ensembles sont des intervalles.
$[a;b]$ est un intervalle fermé et $]a;b[$ est un intervalle ouvert.
$]a;b]$ est un intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé).

Réponse aux exercices

1. Résous les équations suivantes
   (a) $x^2+5x+6=0$ $S=\{-3;-2\}$
   (b) $x^2-6x+8=0$ $S=\{2;4\}$
   (c) $x^2+x-1=0$ $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
   (d) $9x^2+24x+16=0$ $S=\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$
   (e) $2x^2+3x+4=0$ Pas de solution
   (f) $4x^2=16x$ $S=\{0;4\}$
   (g) $18x^2+3x-1=0$ $S=\left\{-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6}\right\}$
   (h) $x^2-5=0$ $S=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$
   (i) $-x^2+2x+5=0$ $S=\{1-\sqrt{6};1+\sqrt{6}\}$
   (j) $x^2+\dfrac{x}{4}-\dfrac{3}{8}=0$ $S=\left\{-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right\}$
   (k) $-x^2-0,3x+0,4=0$ $S=\left\{-\dfrac{4}{5};\dfrac{1}{2}\right\}$
   (l) $x^2=x$ $S=\{0;1\}$
   (m) $-x^2-25=0$ Pas de solution
   (n) $x+6x^2=1$ $S=\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right\}$
   (o) $36x+12=6x^2-6$ $S=\{3-2\sqrt{3};3+2\sqrt{3}\}$
   (p) $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$ $S=\{\sqrt{2}\}$
2. Résous les équations suivantes
   (a) $5x^2+1=0$ Pas de solution
   (b) $x^2=81$ $S=\{-9;9\}$
   (c) $7x^2=3x$ $S=\left\{0;\dfrac{3}{7}\right\}$

5

(d) $4x^2 - 3 = 0 \qquad S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

(e) $12x^2 - 27 = 0 \qquad S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

(f) $7x^2 + 9x = 0 \qquad S = \left\{-\frac{9}{7}; 0\right\}$

(g) $121 - 49x^2 = 0 \qquad S = \left\{-\frac{11}{7}; \frac{11}{7}\right\}$

(h) $(x+3)^2 = 5 \qquad S = \{-3-\sqrt{5}; -3+\sqrt{5}\}$

(i) $(x-2)^2 = 9(x-2) \qquad S = \{2; 11\}$

(j) $x^2 - 10 = 0 \qquad S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$

(k) $(x-9)^2 + 1 = 0$ Pas de solution

(l) $(4x-7)^2 = 0 \qquad S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

3. Les 6 cas.

Nombre de racines	signe de a	signe de f(x)
0	-	-
1	+	+ 0 +
2	+	+ 0 - 0 +
0	+	+
1	-	- 0 -
2	-	- 0 + 0 -

4. Dresse le tableau de signe de

(a) $x^2 - 6x + 8 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$

$\rho = b^2 - 4ac = 36 - 4.8 = 4$ 2 racines : $\frac{6 \pm 2}{2} =< \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$

x		2		4	
$x^2 - 6x + 8$	$+$	0	$-$	0	$+$

(b) $x^2 + x - 1 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

$\rho = b^2 - 4ac = 1 - 4.(-1) = 5$ 2 racines : $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} =< \begin{matrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$

x		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
x^2+x-1	$+$	0	$-$	0	$+$

(c) $9x^2+24x+16$ $\begin{cases} a=9 \\ b=24 \\ c=16 \end{cases}$

$\rho = b^2-4ac = 24^2-4.144 = 0$ **1 racine :** $\dfrac{-24}{18} = -\dfrac{4}{3}$

x		$\frac{-4}{3}$	
$9x^2+24x+16$	$+$	0	$+$

(d) $4x^2-16x$

$4x\,(x-4)=0$ **ssi** $x=0$ **ou** $x=4$

x		0		4	
$4x^2-16x$	$+$	0	$-$	0	$+$

(e) $18x^2+3x-1$ $\begin{cases} a=18 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}$

$\rho = b^2-4ac = 9-4.(-18) = 81$ **2 racines :** $\dfrac{-3\pm 9}{36} =< \begin{matrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{matrix}$

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	
$18x^2+3x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

(f) x^2-5

$x^2-5=0$ ssi $x^2=5$ **ssi** $x=\pm\sqrt{5}$

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
x^2-5	$+$	0	$-$	0	$+$

(g) $-x^2+2x+5$ $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=5 \end{cases}$

$\rho = b^2-4ac = 1-4.(-5) = 21$ **2 racines :** $\dfrac{-2\pm\sqrt{21}}{-2} =< \begin{matrix} \frac{2+\sqrt{21}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{21}}{2} \end{matrix}$

x		$\frac{2-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{21}}{2}$	
$-x^2+2x+5$	$-$	0	$+$	0	$-$

(h) $x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}$ $\qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{4} \\ c = -\frac{3}{8} \end{cases}$

$\rho = b^2 - 4ac = \frac{1}{16} - 4.\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{25}{16}$ 2 racines : $\frac{-\frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}}{2} =<\begin{matrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

x		$-\frac{3}{4}$		$\frac{1}{2}$	
$x^2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}$	$+$	0	$-$	0	$+$

(i) $x^2 - x$

$x^2 - x = 0$ ssi $x(x-1) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 1$

x		0		1	
$x^2 - x$	$+$	0	$-$	0	$+$

(j) $-x^2 - 25$ $\qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -25 \end{cases}$

$-x^2 - 25 = 0$ ssi $x^2 = -25$ pas de racine

x	
$-x^2 - 25$	$-$

(k) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ $\qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{2} \\ c = 2 \end{cases}$

$\rho = b^2 - 4ac = 8 - 4.2 = 0$ 1 racine : $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

x		$\sqrt{2}$	
$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$	$+$	0	$+$

(l) $-x^2 + 6x - 9$ $\qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -9 \end{cases}$

$\rho = b^2 - 4ac = 36 - 4.9 = 0$ 1 racine : $\frac{-6}{-2} = 3$

x		3	
$-x^2 + 6x - 9$	$-$	0	$-$

(m) x^2+x+8 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=8 \end{cases}$

$\rho=b^2-4ac=1-4.8=-31$ pas de racine

x	
x^2+x+8	$+$

5. Étudie et représente la fonction f (y compris le signe les intersections avec les axes).

(a) $f(x)=-x^2+6x-10$

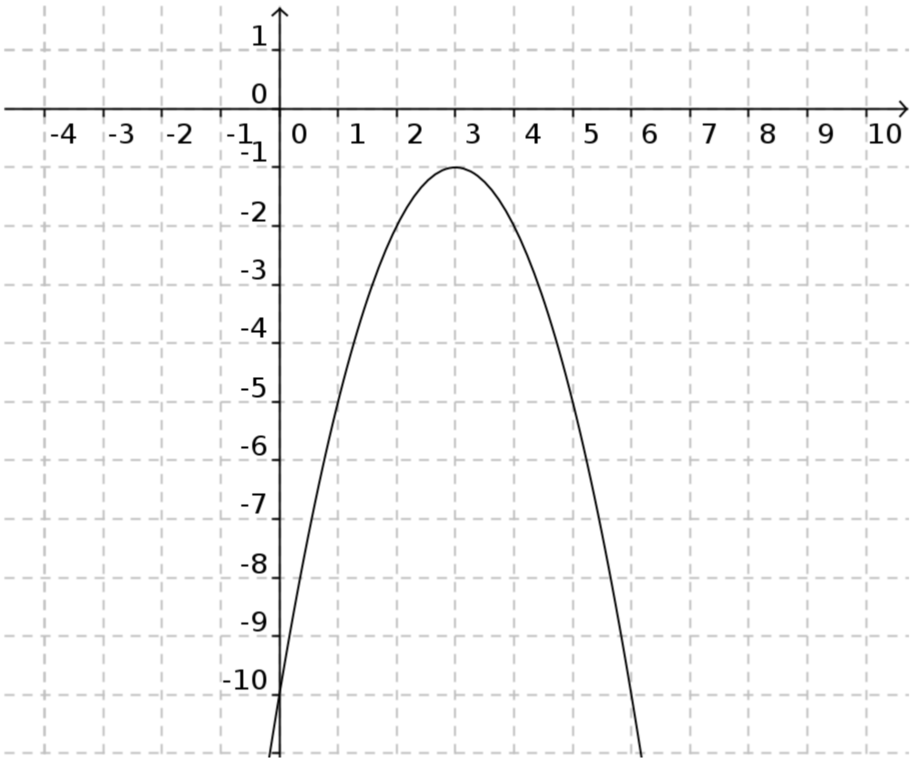
$-\dfrac{b}{2a}=3$ $\rho=-4$ $Axe\equiv x=3$ Sommet$(3;-1)$

x		3	
$-x^2+6x-10$	$\nearrow$	M	$\searrow$

x	
$-x^2+6x-10$	$-$

0	1	2	3	4	5	6
-10	-5	-2	-1	-2	-5	-10

$f\cap Ox:\ /$ $f\cap Oy:\ (0;-10)$



(b) $f(x)=-4x^2+9$

$-\dfrac{b}{2a}=0$ $\rho=144$ $Axe\equiv x=0$ Sommet$(0;9)$

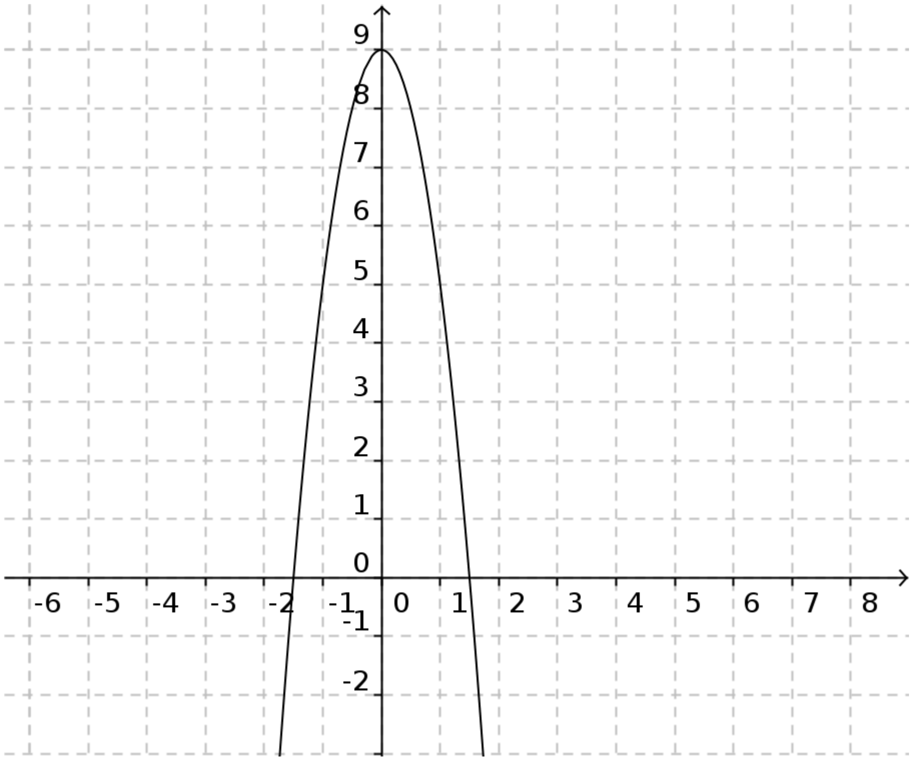
x		0	
$-4x^2+9$	$\nearrow$	M	$\searrow$

x		$-\dfrac{3}{2}$		$\dfrac{3}{2}$	
$-4x^2+9$	$-$	0	$+$	0	$-$

5

-3	-2	-1	0	1	2	3
-27	-7	5	9	5	-7	-27

$f \cap Ox : \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ *et* $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ $\qquad f \cap Oy : (0; 9)$



(c) $f(x) = -4x^2 + 4x + 3$

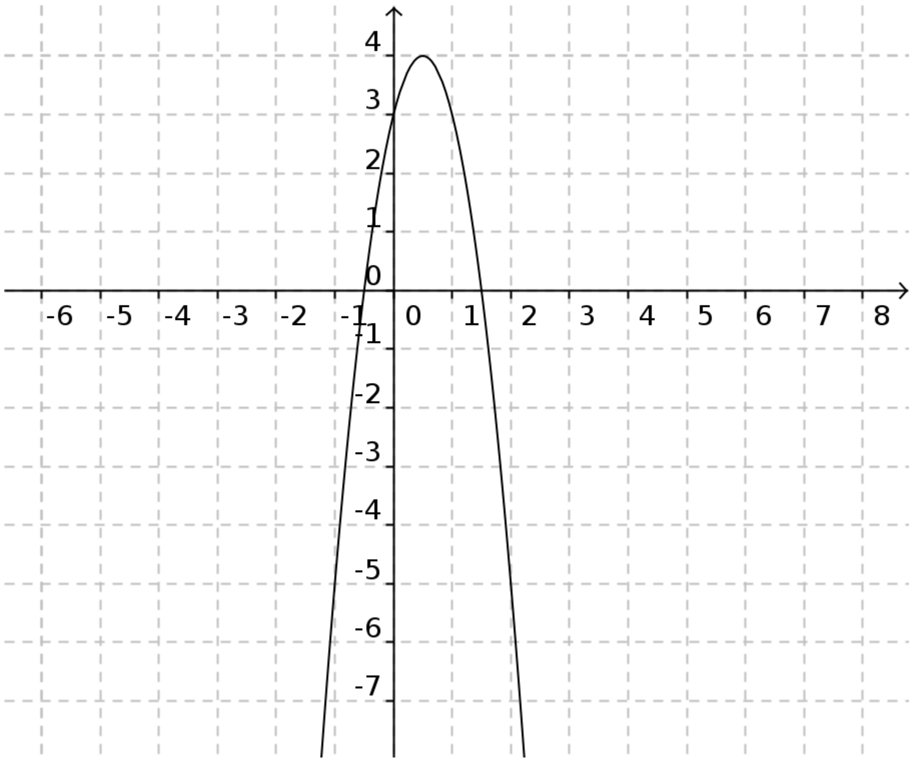
$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ $\qquad \rho = 64$ $\qquad Axe \equiv x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ **Sommet** $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$

x		$\frac{1}{2}$	
$-4x^2 + 4x + 3$	$\nearrow$	M	$\searrow$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$-4x^2 + 4x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
-21	-5	3	4	3	-5	-21

$f \cap Ox : \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ *et* $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ $\qquad f \cap Oy : (0; 3)$



(d) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

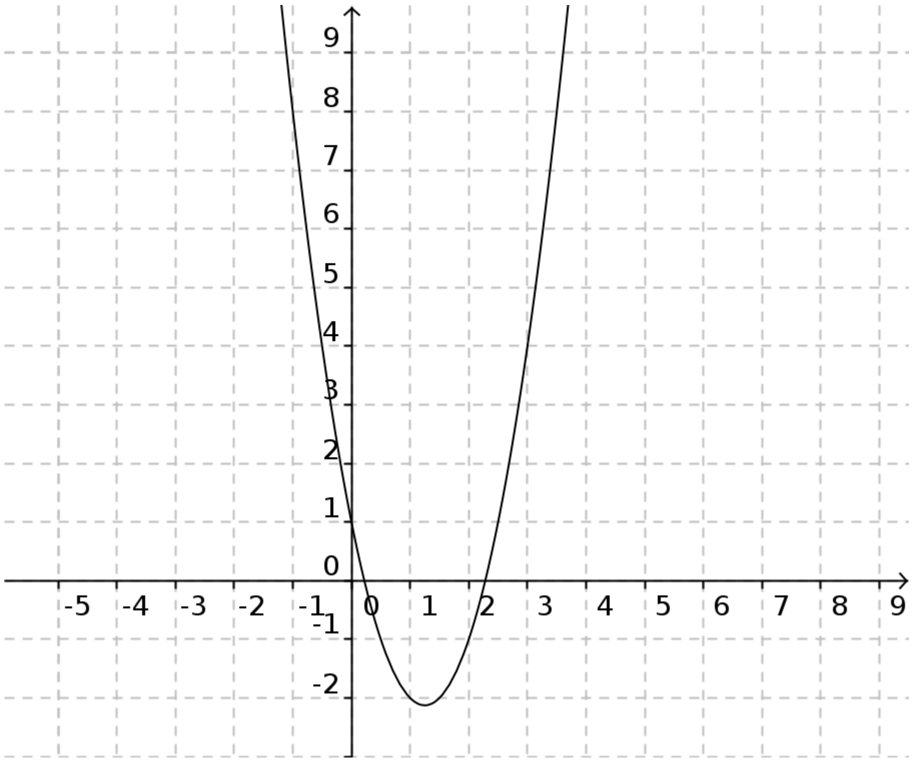
$-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{4}$ $\qquad \rho = 17$ $\qquad Axe \equiv x = \dfrac{5}{4}$ $\qquad$ Sommet $\left(\dfrac{5}{4}; -\dfrac{17}{8}\right)$

x		$\frac{5}{4}$	
$2x^2 - 5x + 1$	$\searrow$	m	$\nearrow$

x		$\frac{5-\sqrt{17}}{4}$		$\frac{5+\sqrt{17}}{4}$	
$2x^2 - 5x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

-2	-1	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
19	8	1	$-\frac{17}{8}$	1	8	19

$f \cap Ox: \left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}; 0\right)$ *et* $\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$ $\qquad f \cap Oy: (0; 1)$



(e) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

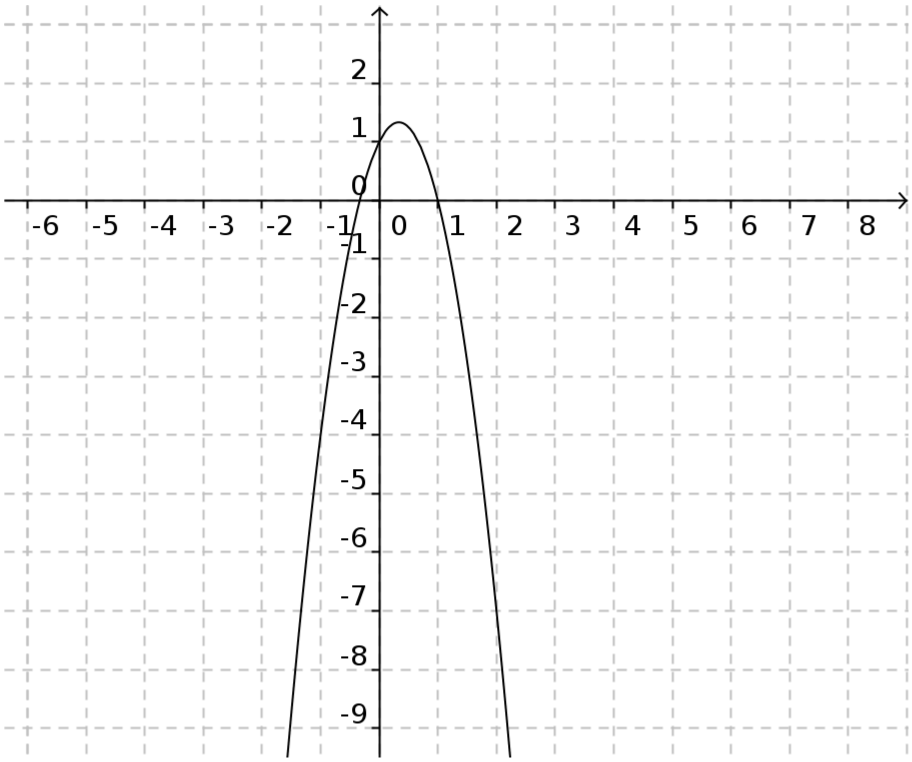
$-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3}$ $\rho = 16$ $Axe \equiv x = \dfrac{1}{3}$ Sommet $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$

x		$\frac{1}{3}$	
$-3x^2 + 2x + 1$	$\nearrow$	M	$\searrow$

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$-4x^2 + 4x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$

-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{3}$
-15	-4	1	$\frac{4}{3}$	1	-4	-15

$f \cap Ox : \left(\dfrac{-1}{3}; 0\right)$ *et* $(1; 0)$ $f \cap Oy : (0; 1)$



(f) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 3x + \dfrac{1}{2}$

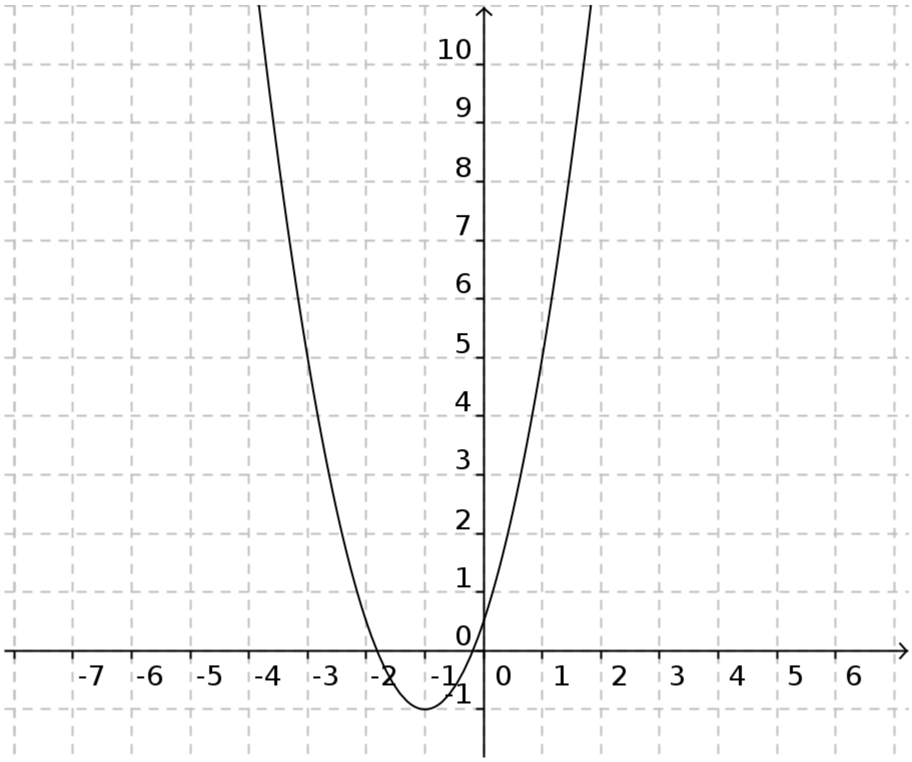
$-\dfrac{b}{2a} = -1 \qquad \rho = 6 \qquad Axe \equiv x = -1 \qquad$ **Sommet**$(-1; -1)$

x		-1	
$\dfrac{3x^2}{2} + 3x + \dfrac{1}{2}$	$\searrow$	m	$\nearrow$

x		$\frac{-3-\sqrt{6}}{3}$		$\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$	
$2x^2 - 5x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

-4	-3	-2	-1	0	1	2
$\frac{25}{2}$	5	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{25}{2}$

$f \cap Ox : \left(\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}; 0\right)$ *et* $\left(\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}; 0\right) \qquad f \cap Oy : \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$



6. Complète le tableau

	Intervalle	Inégalité(s)	Signification
1)	$]-1;5[$	$-1 < x < 5$	Ensemble des réels supérieurs à -1 et inférieurs à 5
2)	$[-8;11[$	$-8 \leq x < 11$	Ensemble des réels supérieurs ou égaux à -8 et inférieurs à 11
3)	$]-\infty;-5[$	$x < -5$	Ensemble des réels inférieurs à -5
4)	$]-1;8]$	$-1 < x \leq 8$	Ensemble des réels supérieurs à -1 et inférieurs ou égaux à 8
5)	$[-1;3]$	$-1 \leq x \leq 3$	Ensemble des réels supérieurs ou égaux à -1 et inférieurs ou égaux à 3
6)	$]-\infty;-1[\cup$ $[6;+\infty[$	$x < -1$ ou $x \geq 6$	Ensemble des réels inférieurs à -1 ou supérieurs ou égaux à 6
7)	$]-2;+\infty[$	$x > -2$	Ensemble des réels supérieurs à -2
8)	$]-\infty;7[$	$x < 7$	Ensemble des réels inférieurs à 7

7. Résous les inéquations

(a) $S = [-4;3]$

(b) $S = \left[-\frac{7}{5};\frac{7}{5}\right]$

(c) $S = \emptyset$

(d) $-2x^2 + 2x + 4 \leq 0$

$S =]\leftarrow; -1] \cup [2; \rightarrow[$

(e) $-2x^2 - 3x + 9 > 0$

$S = \left]-3; \frac{3}{2}\right[$

(f) $2x^2 - 8 \geq 0$

$S =]\leftarrow; -2] \cup [2; \rightarrow[$

(g) $-2x^2 + 4x > 0$

$S =]0; 2[$

(h) $-x^2 + 2x - 1 < 0$

$S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

5.4 Factorisation du trinôme

5

A retenir

Somme et produit des solutions de l'équation du second degré

Remarque préliminaire

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions quand $\rho \geq 0$.

La formule $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}$ valable quand $\rho > 0$, est aussi valable quand $\rho = 0$:

on retrouve alors $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Quand $\rho = 0$, on dit que l'équation admet deux solutions identiques : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Propriété (théorème de Viète)

Quand $\rho \geq 0$, les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on pour

- somme $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- produit $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

Démonstration

Quand $\rho \geq 0$, les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrivent $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\rho}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\rho}}{2a}$.

- $S = x_1 + x_2 =$

- $P = x_1.x_2 =$

Factorisation

Si $\rho > 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ lorsque $x = x_1$ ou $x = x_2$ avec $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$.

On a alors $ax^2 + bx + c$

$= a.\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$

$= a.\left(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1.x_2\right)$

$= a.\left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1.x_2\right)$

$= a.\left[(x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1.x_2)\right]$

$= a.\left[x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1)\right]$

$= a.\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)$

Si $\rho = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ lorsque $x = x_1 = x_2$ avec les mêmes formules.

On a alors $ax^2 + bx + c = a.\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2) = a.\,(x - x_1)^2$

Si $\rho < 0$

$ax^2 + bx + c$ ne s'annule pas et ne peut donc pas se factoriser.

Synthèse

	$\nearrow$	$\rho > 0$	$ax^2 + bx + c = a.\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)$	où $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{}}{2a}$
Factorisation de $ax^2 + bx + c$	$\rightarrow$	$\rho = 0$	$ax^2 + bx + c = a.\,(x - x_1)^2$	où $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$
	$\searrow$	$\rho < 0$	$ax^2 + bx + c$ est infactorisable.	

Réponse aux exercices

1. Factoriser, sans oublier la mise en évidence et les produits remarquables.

   (a) $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)\,(x - 2)$

(b) $6x^2+5x-6=6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(2x+3)(3x-2)$

(c) $8x^3+6x^2-5x-3=(x+1)(8x^2-2x-3)=(x+1).8.\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+1)(4x-3)(2x+1)$

(d) $x^2-9=(x-3)(x+3)$

(e) $2x^2-4x=x(x-2)(x+2)$

(f) $4x^2-20x+25=(2x-5)^2$

(g) $10x^3-3x^2-16x-3=(x+1)(10x^2-13x-3)=(x+1).10.\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x+1)(5x+1)(2x-3)$

2. Simplifie les fractions suivantes ; précise les conditions d'existence avant et après simplification :

5.5 Problèmes et optimisation

A retenir

La résolution d'un problème comprend plusieurs étapes :

- choix de la ou des inconnues
- dessin ou tableau
- fonction à étudier
- ...

Il est important de lire et relire l'énoncé avant chaque étape et de le relire une dernière fois après avoir terminé.

Réponse aux exercices

Les détails se trouvent à l'adresse

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/degre2

onglet « Problèmes ».

Optimisation

1. $x = 80$ m de large et 160 m de long ($12800\ m^2$ de surface)

2. a) i = 26,122 b) Masse idéale : 61,25 kg

3. Une salle de spectacle vend ses billets d'entrée 24€.

   Habituellement, elle accueille 1000 spectateurs.

   Une étude nous apprend que, à chaque augmentation de 1€ du prix du billet, le nombre de spectateurs diminue de 50.

   De même, à chaque diminution de 1€ du prix du billet, le nombre de spectateurs augmente de 50.

   Quel est le prix du billet qui donne la recette maximum ?

   Appelons x le prix du billet.

   La recette est donnée par $f\left(x\right) = x.\left(1000 - 50\left(x - 24\right)\right)$

   $f'\left(x\right) = -100x + 2200$ Sa racine est 22.

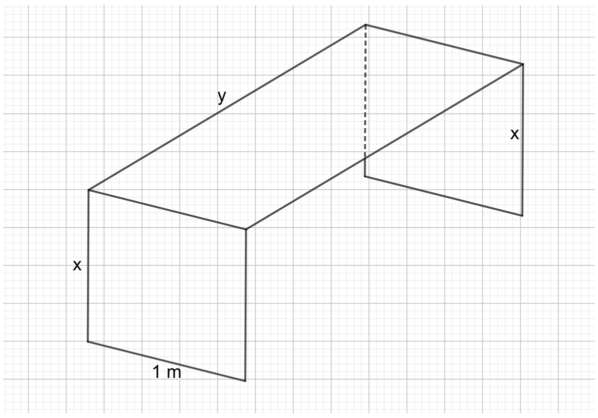
x		22	
$f'\left(x\right)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$

   Le prix du billet qui donne la recette maximum est 22€ .

4. Un abri ouvert formé de parois rectangulaires est composé de deux parois verticales de 1 m de profondeur et d'un toit plat.

   Le toit est exécuté en zinc qui coûte 40€ le m² et les deux autres côtés en contre-plaqué qui coûte 15€ le m².

   Quelles dimensions rendront maximal le volume de l'abri sachant qu'on dispose de 300€ pour la construction ?

   $f\left(x\right) = x.y$

   $40y + 15.2x = 300$

5

$y = \frac{3}{4}(10 - x)$

$f(x) = x.\frac{3}{4}(10 - x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{15}{2}x$

$-\frac{b}{2a} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}} = 5$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{3}{4}.5 = \frac{15}{4} \end{cases}$

5. Un verger compte, en ce moment, 20 arbres. Le rendement moyen est de 300 oranges par arbre.

   On estime que, pour chaque arbre additionnel, le rendement moyen par arbre diminuera de 10 oranges.

   Combien d'arbres faut-il ajouter pour obtenir la plus grande production ?

x	oranges/arbre	Production
20	300	6000
22	280	
17		
x	$300 + (20 - x).10$	$x.(300 + 200 - 10x)$

   $f(x) = x.(500 - 10x) = -10x^2 + 500x$

   $-\frac{b}{2a} = \frac{500}{20} = 25$

   25 arbres 250 oranges/arbre 6250 oranges

6. On coupe à 44 cm pour faire le cercle. Le reste est utilisé pour faire le carré.

7. x = 6 cm et y = 6 cm

8. Détermine deux nombres dont la somme est 29 et dont le produit est maximal.

   Les deux nombres sont égaux et valent 14,5 (produit : 210,25).

9. Détermine deux nombres entiers consécutifs tels que la somme du double du premier avec le carré du second soit minimale.

   Les deux nombres sont -2 et -1 (-3 comme résultat minimal)

Problèmes divers

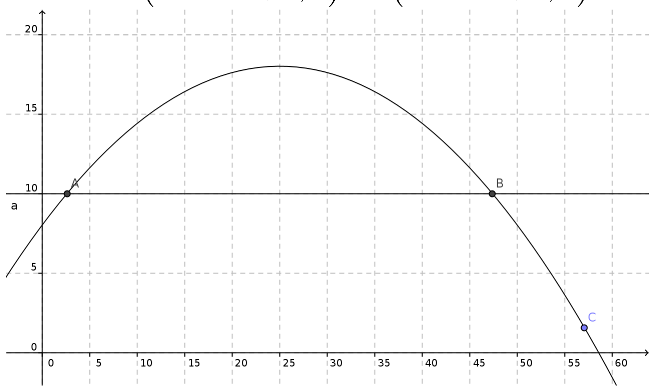
10. $y = -0,016x^2 + 0,8x + 8$

(a) $-\dfrac{b}{2a} = 25$ $\quad \rho = 1,152$ $\quad Axe \equiv x = 25$ $\quad$ Sommet$(25; 18)$

x		25	
$-0,016x^2 + 0,8x + 8$	$\nearrow$	M	$\searrow$

0	10	20	25	30	40	50
8	$14,4$	$17,6$	18	$17,6$	$14,4$	8

$G \cap Ox:\ \left(25 - 15\sqrt{5}; 0\right)\ et\ \left(25 + 15\sqrt{5}; 0\right)$ $\qquad G \cap Oy:\ (0; 8)$



(b) A 58,54 m de David

(c) 18 m

(d) 8 m

(e) A 2,64 m et à 47,36 m de David

(f) Oui, car après 57 m, il se trouve à une hauteur de 1,62 m (visage)

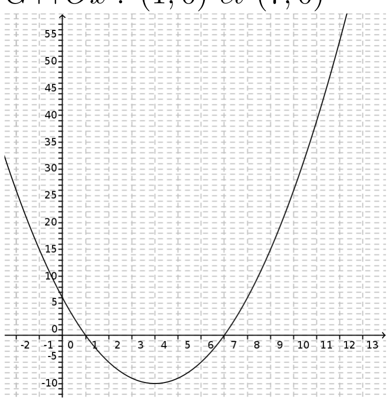
11. $y = t^2 - 8t + 7$

(a) $-\dfrac{b}{2a} = 4$ $\quad \rho = 36$ $\quad Axe \equiv x = 4$ $\quad$ Sommet$(4; -9)$

t		4	
$t^2 - 8t + 7$	$\searrow$	m	$\nearrow$

0	1	2	4	6	7	8
7	0	-5	-9	$17,6$	-5	7

$G \cap Ox:\ (1; 0)\ et\ (7; 0)$ $\qquad G \cap Oy:\ (0; 7)$



(b) En janvier et à partir de début août jusque fin d'année

(c) De début février à fin juillet

(d) Le 1er mai – 9 millions d'Euros

(e) 48 millions d'Euros de plus-value

12. Entre 1 h et 4 h

13. De 20 m à 25 m

14. Entre 36 et 38 arbres par hectare

15. Vitesses en montée supérieures à 28,59 km/h et vitesses en descente supérieures à 48,59 km/h

16. a) Entre 10 et 40 mètres

    b) $x = \frac{2v^2}{25}$ La vitesse initiale doit être comprise entre 3,53 m/s et 27,39 m/s pour que la fusée retombe dans la zone de sécurité.

17. Le côté du carré mesure $2,95$ m et

    la hauteur du rectangle est de $1,47$ m (largeur 7 m).

18. 13 ou -14

19. 16 et 17 ou -17 et -16

20. 15,79 m

21. 3 unités

22. 12 livres

23. Petite aiguille : 51 cm ; Grande aiguille : 68 cm

24. 3, 4 e t5

25. l = 15,67 cm et L = 20,67 cm

26. 14,5 cm

27. soit 4 et 5, soit -3 et -2

28. 1,5 cm

29. 2,41 m

30. 3,31 cm

31. 32 m

32. 10 cm

33. 122 spectateurs et 6 musiciens

34. soit -1 et -2, soit -7 et 4

5.6 Compléments

A retenir

Études de signe

Factorise et réduis au même dénominateur si nécessaire, car la règle des signes ne s'appliquent qu'aux produits (et aux quotients).

Le but est d'obtenir des expressions du premier ou du second degré.

Résolution d'inéquations

1. Place tous les termes dans le membre de gauche : 0 dans le membre de droite.
2. Factorise (réduis au même dénominateur), car la règle des signes ne s'appliquent qu'aux produits (et aux quotients). Le but est d'obtenir des expressions du premier ou du second degré.
3. Dresse le tableau de signe du membre de gauche.
4. Sélectionne l'ensemble des solutions.
5. Écris cet ensemble.

Remarque sur la multiplication ou la division des deux membres

1. Multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement positif la transforme en une inéquation équivalente (mêmes solutions).
2. Multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un nombre strictement négatif la transforme en une inéquation équivalente (mêmes solutions) A CONDITION D'INVERSER LE SYMBOLE DE L'INÉQUATION.
3. Multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par une expression contenant l'inconnue (x) la transforme en une inéquation qui n'est généralement PAS équivalente (symbole de cette inéquation ?).

   A éviter !

Comparaison de fonctions

Comparer deux fonctions, c'est comparer leurs images.
Comme l'axe Oy est orienté vers le haut,
une fonction est plus grande qu'une autre
lorsqu'elle est plus haut sur le graphique.
Pour obtenir des renseignements exacts sur $f(x) > g(x)$,
un tableau de signe de $f(x) - g(x)$ est souvent utile.

Réponse aux exercices

Résolution d'équations

1. Résous les équations suivantes
   (a) $S = \left\{\frac{18}{5}; 0\right\}$
   (b) $S = \{2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\}$
   (c) $S = \{-1; 2\}$
   (d) $S = \{-10; 10\}$
   (e) $S = \{0\}$
   (f) $S = \left\{-\frac{1}{3}; -5\right\}$
   (g) $S = \emptyset$
   (h) $S = \left\{-\frac{7}{2}; -1\right\}$
   (i) $S = \{-1; 4\}$
   (j) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
   (k) $S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$ -3 à rejeter
   (l) $S = \left\{-\frac{1}{8}; 5\right\}$
   (m) $S = \{2\}$
   (n) $S = \left\{\frac{1-2\sqrt{6}}{2}; \frac{1+2\sqrt{6}}{2}\right\}$
   (o) $S = \{3\}$ 2 à rejeter
   (p) $S = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Simplification de fractions rationnelles

2. Simplifie les expressions suivantes ; précise les conditions d'existence avant et après simplification.

(a) $\dfrac{6x^2+13x-28}{9x^2-16}=\dfrac{2x+7}{3x+4}$ CE av : $\begin{cases} x\neq -\dfrac{4}{3} \\ x\neq \dfrac{4}{3}\end{cases}$ CE ap : $x\neq -\dfrac{4}{3}$

(b) $\dfrac{-12x^2+7x+12}{4x^2+7x+3}=\dfrac{-3x+4}{x+1}$ CE av : $\begin{cases} x\neq -\dfrac{3}{4} \\ x\neq -1\end{cases}$ CE ap : $x\neq -1$

(c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{2x^2-5x-3}=\dfrac{2x+1}{x-3}$ CE av : $\begin{cases} x\neq -\dfrac{1}{2} \\ x\neq 3\end{cases}$ CE ap : $x\neq 3$

(d) $\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{x-2}$ CE av : $\begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 3\end{cases}$ CE ap : $x\neq 2$

(e) $\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-4x}=\dfrac{3x-1}{2x}$ CE av : $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2\end{cases}$ CE ap : $x\neq 0$

(f) $\dfrac{2x^2-x-3}{10x^3-3x^2-16x-3}=\dfrac{1}{5x+1}$ CE av : $\begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq \dfrac{3}{2} \\ x\neq -\dfrac{1}{5}\end{cases}$ CE ap : $x\neq -\dfrac{1}{5}$

(g) $\dfrac{4x^2-20x+25}{8x^2-26x+15}=\dfrac{2x-5}{4x-3}$ CE av : $\begin{cases} x\neq \dfrac{3}{4} \\ x\neq \dfrac{5}{2}\end{cases}$ CE ap : $x\neq \dfrac{3}{4}$

Études de signe

3. Étudie le signe des expressions suivantes.

(a)

x		$-\dfrac{1}{2}$		3	
$2x^2-5x-3$	$+$	0	$-$	0	$+$

(b)

x	
$-x^2+x-1$	$-$

(c)

x		$\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{3}{2}$		2	
$\dfrac{(2x^2-3x+7).(3-2x)}{-3x^2+5x+2}$	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

(d)

x		$\frac{1}{2}$	
$-2.\left(4x^2-4x+1\right).\left(9+x^2\right)$	$-$	0	$-$

(e)

x		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$\dfrac{\left(-2x^2+x-4\right)^5.\left(x^2-3\right)}{(x+2)^2}$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$+$	$-$

(f)

x		0		$\frac{1}{3}$		1	
$\dfrac{3}{3x^3-4x+x}$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

Les trois suivants se trouvent à l'adresse

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/degre2

onglet « Signe ».

(g)

x		-2		-1		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$	
$2x^2-3x-5$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$-3x^2-5x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{\left(2x^2-3x-5\right).(3-2x)}{-3x^2-5x+2}$	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

(h)

x		$-\frac{4}{3}$		$\frac{3}{4}$		3	
$2x^2+x+7$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-3x^2+5x+12$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\dfrac{\left(2x^2+x+7\right).(4x-3)}{-3x^2+5x+12}$	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$

(i)

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		2	
$4x^2-4x+1$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(3-2x)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$-3x^2+5x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\dfrac{\left(4x^2-4x+1\right).(3-2x)^2}{-3x^2+5x+2}$	$-$	$\vert$	$+$	0	$+$	0	$+$	$\vert$	$-$

Résolution d'inéquations

4. Résoudre les inéquations suivantes.

(a) $S =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$

(b) $S =]-\infty; -2] \cup \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; 2\right] \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

(c) $S = \left]-\infty; \dfrac{2}{3}\right[$

(d) $S = \left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$

(e) $S =]-\infty; 0[\cup \left]\dfrac{1}{4}; 1\right[\cup]3; +\infty[$

(f) $S =]-\infty; -2] \cup \left[-\dfrac{4}{5}; \dfrac{4}{5}\right]$

(g) $S = \{-1; 3\} \cup]9; +\infty[$

(h) $S = \left]-2\sqrt{2}; 0\right[\cup \left]2\sqrt{2}; +\infty\right[$

(i) $S =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

(j) $S = \left]-1; \dfrac{2}{3}\right[$

(k) $S =]-\infty; -2] \cup [8; +\infty[$

(l) $S =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

(m) $S =]-\infty; -2[\cup]0; 2[$

(n) $S =]3; +\infty[$

(o) $S =]-\infty; -2]$

(p) $S = \left]-\sqrt{5}; \dfrac{1}{2}\right] \cup \left]\sqrt{5}; +\infty\right[$

(q) $S = [-2; 0[\cup [2; +\infty[$

(r) $S =]-\infty; -2[\cup [-1; 0[\cup [2; +\infty[$

(s) $S =]-\infty; -1[\cup]1; 2[$

(t) $S = \left]1; \dfrac{11}{5}\right] \cup]3; +\infty[$

Les trois suivants se trouvent à l'adresse

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/degre2

onglet « Inéquations ».

(u) $S =]-4; -2[\cup [1; +\infty[$

(v) $S =]-1; 0[\cup]1; 2[$

(w) $S =]-3; -2] \cup]2; 4]$

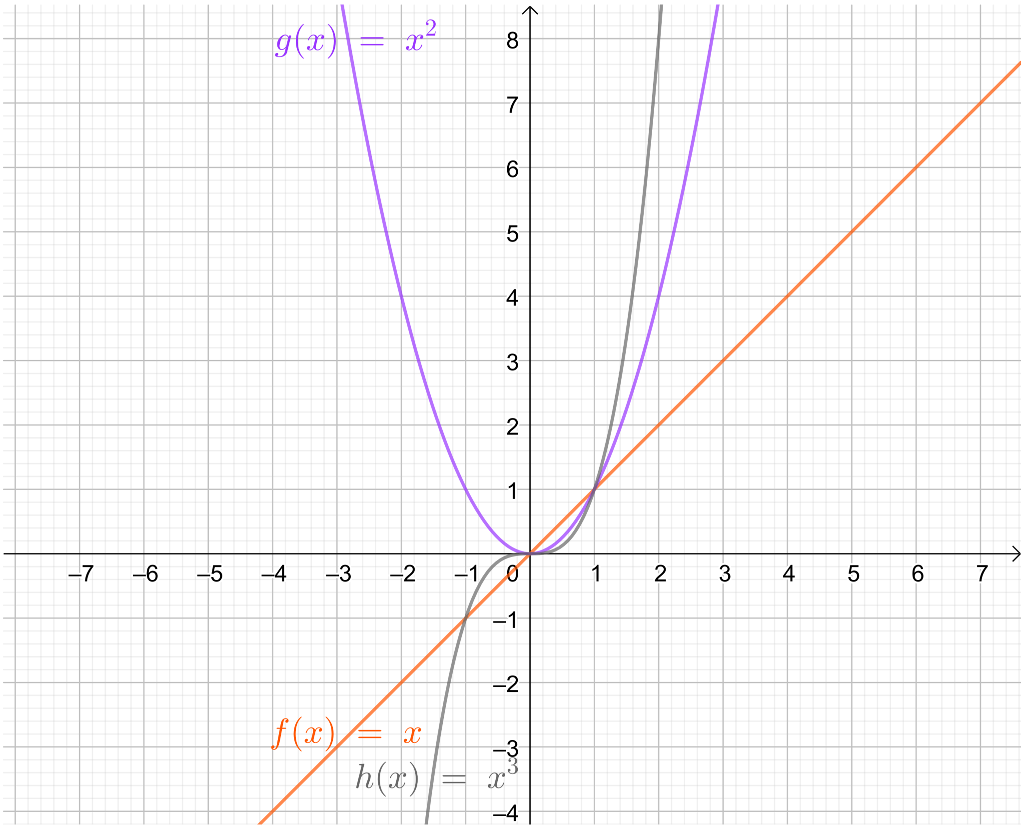
(x) $S = \left[-1; -\frac{1}{5}\right[\cup \left[\frac{1}{7}; \frac{3}{2}\right[$

(y) $S =]2; 3] \cup]7; +\infty[$

(z) $S =]1; 2] \cup]3; 16]$

Comparaison de fonctions

Considérons les fonctions f, g et h définies par $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, et $h(x) = x^3$.



Indique le domaine où

1. $f > g$

   $f > g$ signifie $x > x^2$ ou encore $x - x^2 > 0$.

x		0		1	
$x - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

   $0 < x < 1$ comme tu le vois sur le graphique.

   Réponse : $]0; 1[$

2. $g > h$

$g > h$ signifie $x^2 > x^3$ ou encore $x^2 - x^3 > 0$.

x		0		1	
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^2-x^3	$+$	0	$+$	0	$-$

$x < 0$ ou $0 < x < 1$ comme tu le vois sur le graphique.

Réponse : $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$

3. $h > f$

$h > f$ signifie $x^3 > x$ ou encore $x^3 - x > 0$.

x		-1		0		1	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^3-x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$-1 < x < 0$ ou $x > 1$ Les deux fonctions s'entrelacent.

Réponse : $]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

4. $g \geq f$

$g \geq f$ signifie $x^2 \geq x$ ou encore $x^2 - x \geq 0$.

x		0		1	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2-x	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \leq 0$ ou $x \geq 1$ comme tu le vois sur le graphique.

Réponse : $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

5. $h \leq f$

$h \leq f$ signifie $x^3 \leq x$ ou encore $x^3 - x \leq 0$.

x		-1		0		1	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^3-x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \leq -1$ ou $0 \leq x \leq 1$ Les deux fonctions s'entrelacent.

Réponse : $]-\infty; -1] \cup [0; 1]$

5

Chapitre 6

Géométrie dans l'espace

6.1 Perspective

A retenir

Une perspective cavalière d'un solide est une représentation plane de celui-ci qui respecte les conventions suivantes.

• Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.

• Le milieu d'un segment est représenté au milieu du segment dessiné correspondant ; des points alignés sont représentés par des points alignés.

• Les segments cachés sont représentés en pointillés et les segments visibles sont représentés en traits pleins.

• Les figures situées dans un plan frontal (« de face ») sont représentées en vraie grandeur (à l'échelle) ; dans ce cas, les angles sont respectés.

6

Règles de la perspective cavalière

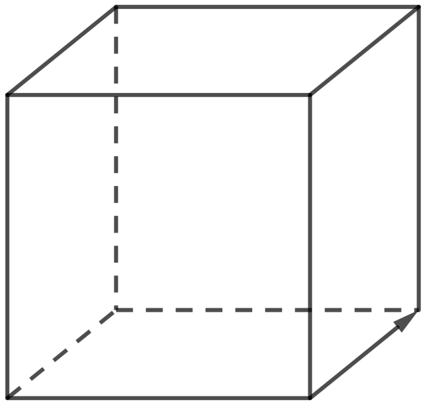
• Tout point de l'espace se représenté par un point, désigné par une majuscule.

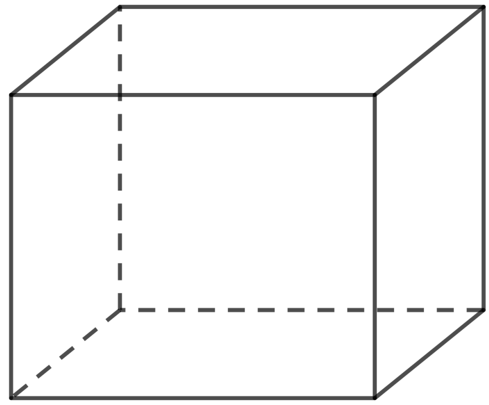
• Toute droite de l'espace se représente par un segment (exceptionnellement un point), désigné par une minuscule.

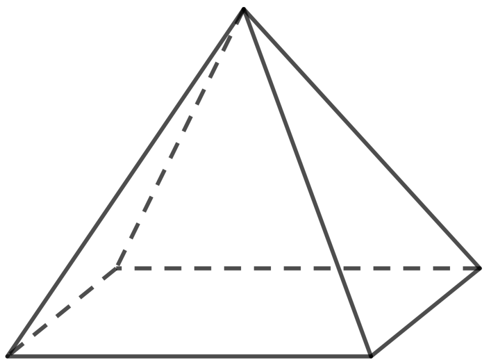
• Tout plan de l'espace se représente par un parallélogramme (exceptionnellement un segment), désigné par une lettre grecque.

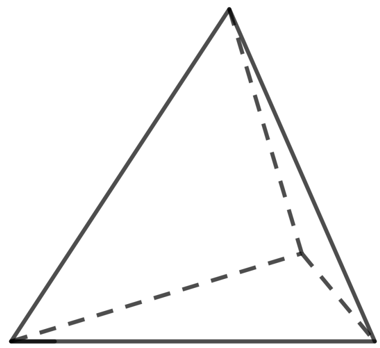
• D'un sommet caché sont issues des arêtes cachées (pointillés).

Réponse aux exercices









1.

6.2 Positions relatives

A retenir

Droites

Une droite peut être définie par deux points disincts.

Plans

Un plan peut être défini par

- trois points non alignés
- une droite et un point n'appartenant pas à cette droite
- deux droites parallèles
- deux droites sécantes

Positions relatives de deux plans

plans α et β

- $\nearrow$ sécants (une droite commune)
  - $\nearrow$ obliques
  - $\searrow$ perpendiculaires
- $\searrow$ parallèles
  - $\nearrow$ strictement (aucun point commun)
  - $\searrow$ confondus $(\alpha = \beta)$

Position relative d'un plan et d'une droite

plan α et droite d

- $\nearrow$ 1 point commun (sécants)
  - $\nearrow$ obliques
  - $\searrow$ perpendiculaires
- $\longrightarrow$ 0 point commun $\longrightarrow$ strictement parallèles
- $\searrow$ une infinité de points communs $\longrightarrow$ parallèles, d incluse dans α

Position relative de deux droites

droites d et d'	Même direction	↗ aucun point commun	strictement parallèles
		↘ tous les points communs	parallèles confondues
	Directions orthogonales	↗ 1 point commun	perpendiculaires (sécantes)
		↘ aucun point commun	orthogonales et gauches
	Directions obliques	↗ 1 point commun	sécantes (et obliques)
		↘ aucun point commun	obliques et gauches

Ainsi, des droites gauches n'ont pas la même direction et n'ont pas de point commun.

Les quatre autres cas concernent des droites coplanaires.

Autrement dit, les droites sécantes ou parallèles **sont avant tout coplanaires.**

Remarque le retour de « orthogonal », venu des vecteurs.

Réponse aux exercices

2. Avec ce même cube,

   (a) le plan HEF, qui est le plan de la face arrière
   le plan contenant la droite BC et le point F, qui est le plan de la face droite
   le plan des droites CD et GH, qui est le plan de la face supérieure,
   le plan des droites AB et BD, qui est le plan de la face inférieure.

(b) Oui, car les droites CD et EF sont parallèles ; ce plan coupe le cube en deux.

(c) Non, car ABD est le plan de la face avant et F n'y appartient pas.

3. Dans le cube, quelle est la position relative des plans

(a) sécants

(b) sécants

(c) parallèles

4. Dans le cube, quelle est la position relative

(a) sécants, B est le point de percée. De plus la droite et le plan sont perpendiculaires.

(b) sécants, B est le point de percée. La droite et le plan sont obliques.

(c) parallèles

5. Dans le cube, quelle est la position relative des droites

(a) sécantes

(b) gauches, AF perce le plan HGF.

(c) gauches, DA perce le plan HGD.

(d) sécantes

(e) gauches, AF perce le plan HCF.

(f) parallèles

(g) gauches, BI perce le plan DGI.

6. Quelle est la position relative de

(h) AB et EF sont strictement parallèles.

(i) AB et DE sont sécantes.

(j) CD et EK sont gauches.

(k) ABC et DEK sont sécants suivant la droite DE.

(l) ABC et DEF sont parallèles confondus.

(m) DEK et ABG sont sécants.

(n) IJC et BF sont sécants.

(o) BFH et IC sont strictement parallèles.

(p) JK et CD sont gauches.

(q) GI et CD sont gauches et orthogonales.

6.3 Sections planes

A retenir

Nous allons maintenant jeter les bases de notre modèle mathématique, nos axiomes.

Axiomes

• 1. L'espace est un ensemble de points qui inclut comme sous-ensembles propres les droites et les plans.

• 2. Deux points distincts déterminent une et une seule droite.

• 3. Trois points non-alignés déterminent un et un seul plan.

• 4. Dans chacun des plans de l'espace, les propriétés de la géométrie plane sont d'application.

• 5. Toute droite inclut un ensemble infini de points et par toute droite passent une infinité de plans.

• 6. Deux plans distincts ont en commun une et une seule droite ou aucun point.

• 7. Une droite contenant deux points d'un plan est incluse dans ce plan.

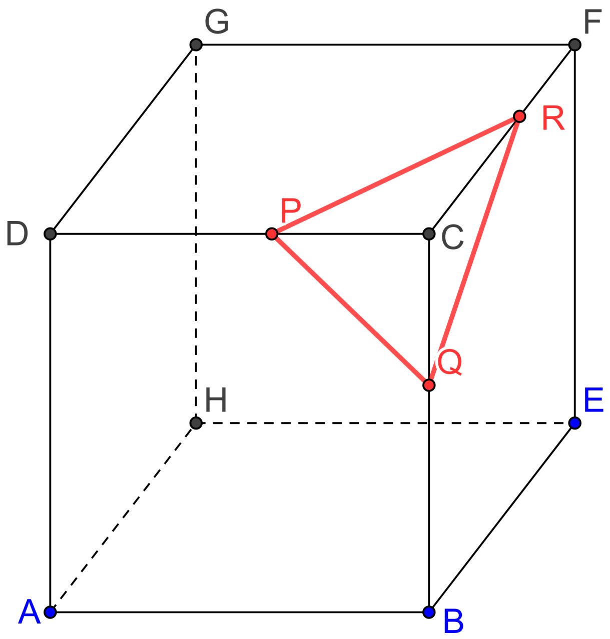
Réponse aux exercices

Dans chacun des cas, il s'agit de construire la section du cube par le plan PQR.

Cette section doit être justifiée à l'aide des axiomes et des théorèmes vus précédemment.

Travaille face par face !

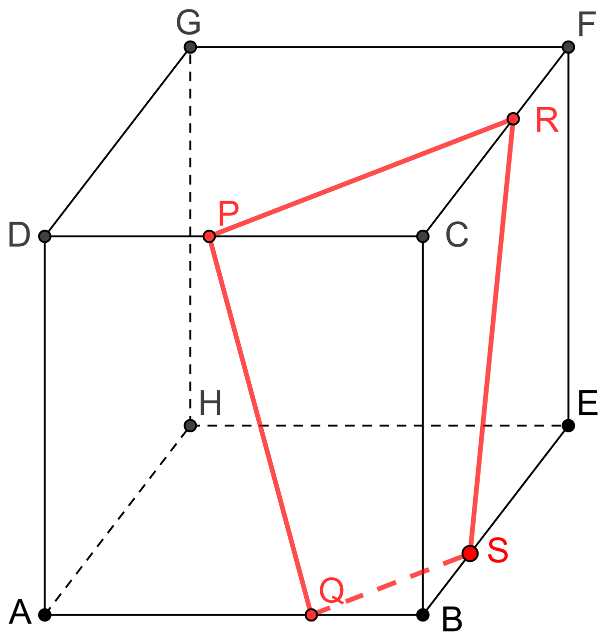
7.



Sur la face supérieure, le dernier axiome (Une droite contenant deux points d'un plan est incluse dans ce plan) nous garantit que le segment $[PR]$ fait partie de la section.

Idem pour les segments $[RQ]$ et $[QP]$.

8.



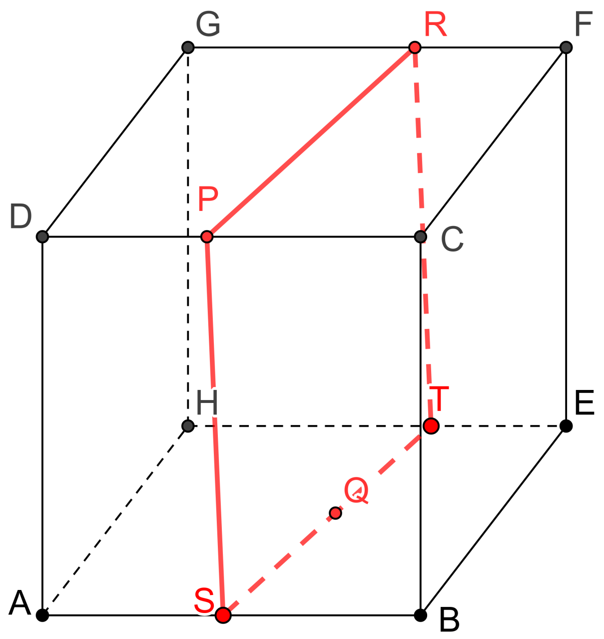
Cet exercice commence comme le précédent.

Pour les détails :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/espace

onglet « Sections ».

9.



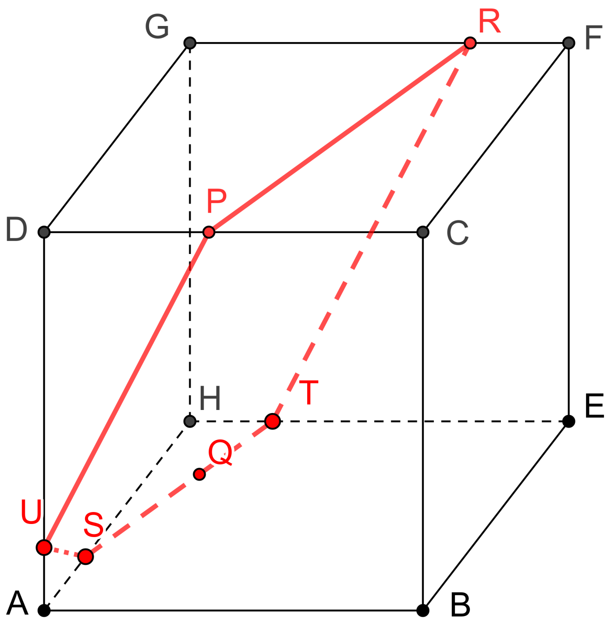
Q ∈ BEHA

Pour les détails :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/espace

onglet « Sections ».

10.

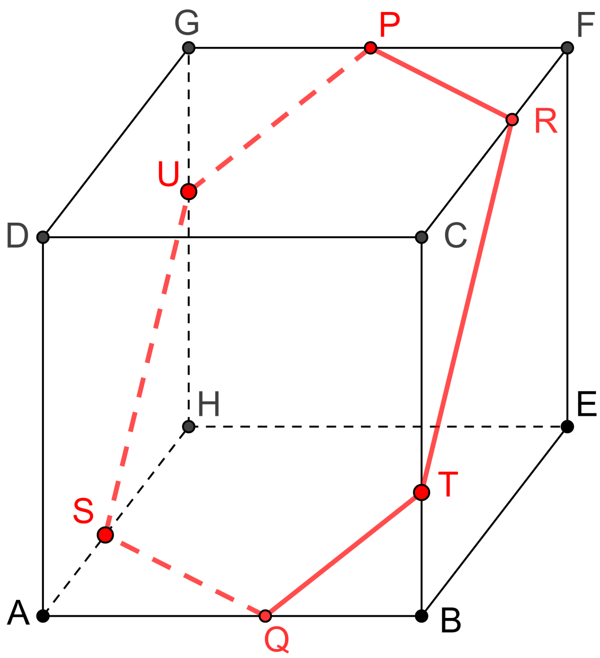


Pour les détails :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/espace

onglet « Sections ».

11.



Pour les détails :

http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/espace

onglet « Sections ».

6.4 Point de percée

A retenir

Le point de percée d'une droite dans un plan est le point commun de cette droite et du plan ; autrement dit, leur point d'intersection.

Pour déterminer le point de percée d'une droite dans un plan, suis cette méthode :

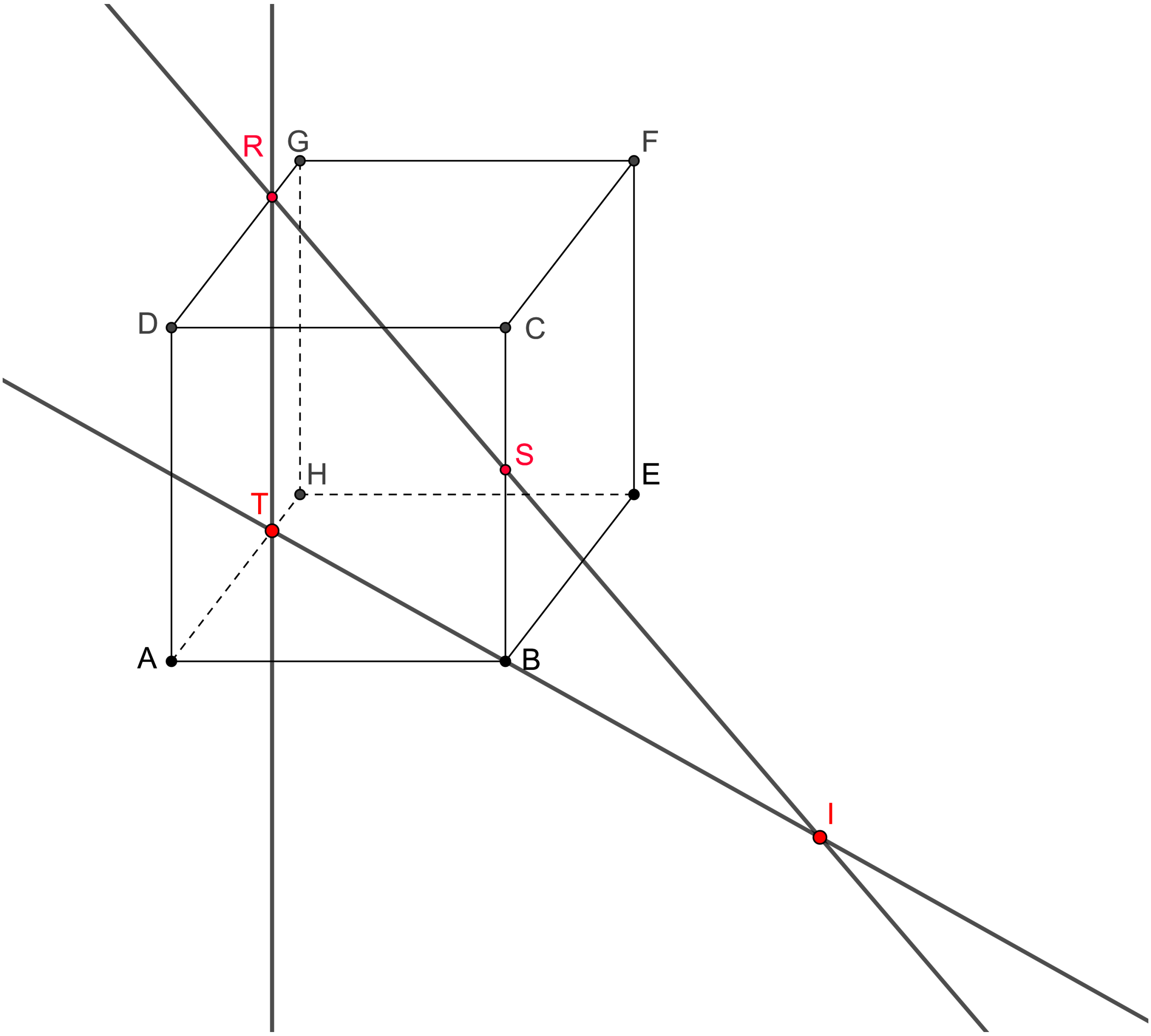
1. Choisis un plan comprenant la droite donnée.
2. Trace la droite d'intersection de ce plan avec le plan donné.

3. Déterminez le point d'intersection de cette droite avec la droite donnée.

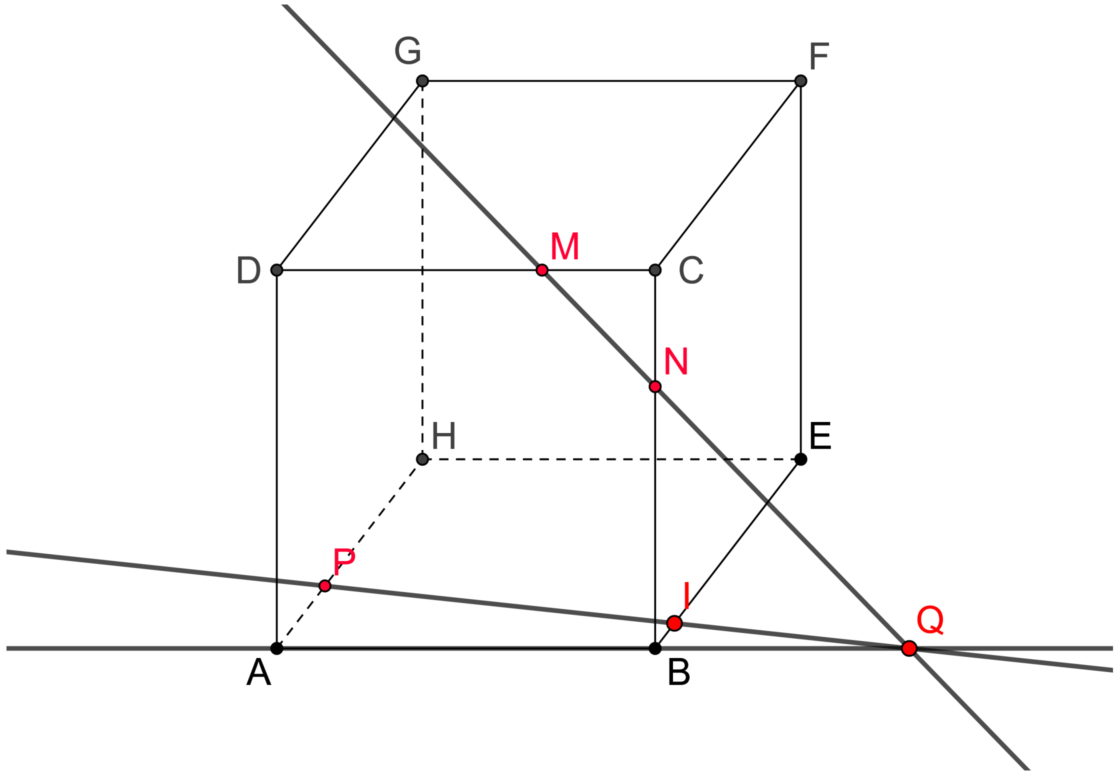
Réponse aux exercices

Les détails se trouvent à l'adresse
http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/espace
sous l'onglet « Percées ».

1.



2.

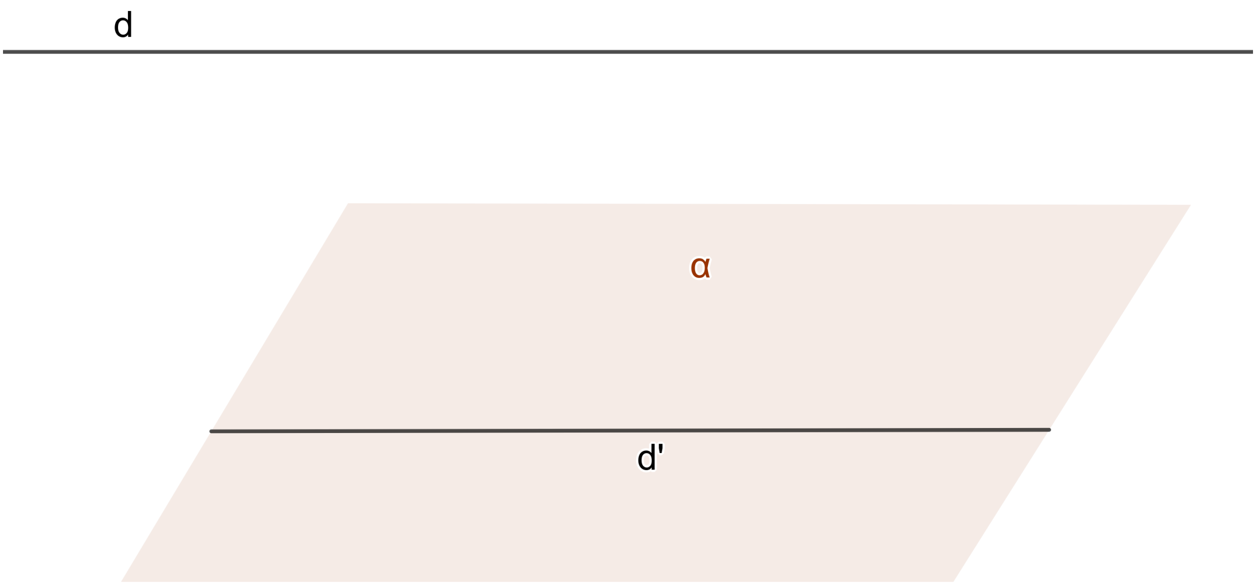


6.5 Critères de parallélisme

A retenir

- Par un point extérieur à une droite,
  il passe une et une seule parallèle à la droite.

- **Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite du plan.**



Théorème direct

> Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle au plan.

Hypothèse

$$\begin{cases} d//d' \\ d' \subset \alpha \end{cases}$$

Thèse

$d//\alpha$

Démonstration

Laissons tomber le cas où $d \subset \alpha$ et donc $d//\alpha$ pour nous concentrer sur $d//d'$ parallèles distinctes.

d et d' sont donc parallèles distinctes et déterminent un plan (il s'y trouve 3 points non alignés).

Appelons ce plan β.

α et β ont la seule droite d' en commun (sinon d coupe d' , ce qui est absurde).

donc d n'a aucun point commun avec α et $d//\alpha$ cqfd.

Réciproque

> Si une droite est parallèle à un plan, alors elle est parallèle à une droite de ce plan.

Hypothèse

$d//\alpha$

Thèse

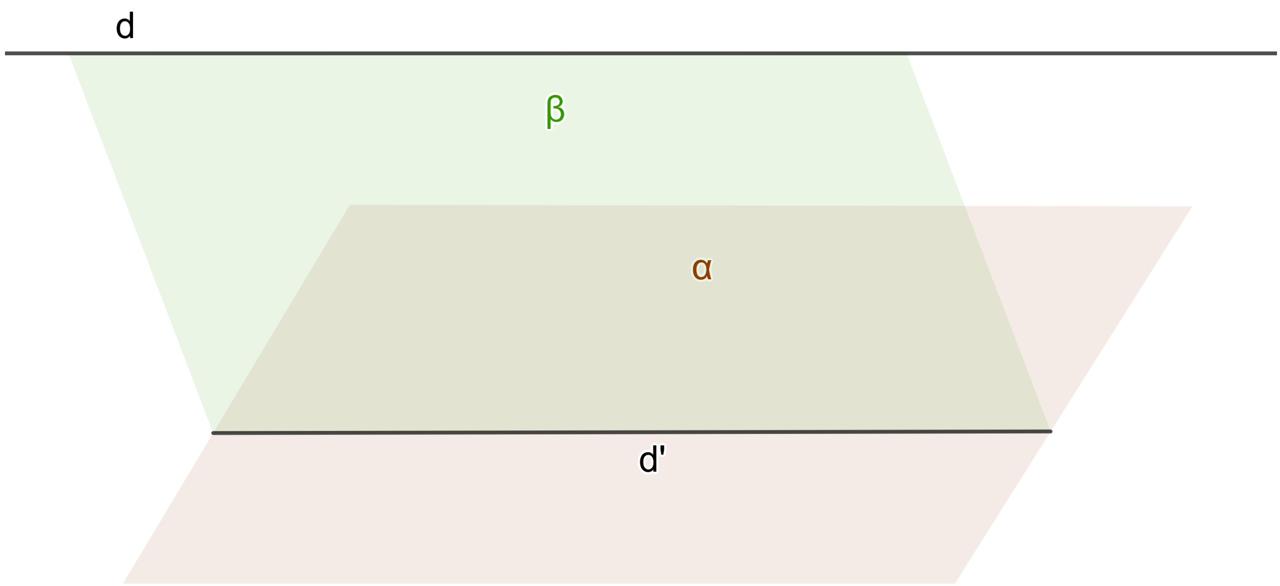
Il existe $d' \subset \alpha$ telle que $d//d'$.

Démonstration

Laissons tomber le cas où $d \subset \alpha$ et donc d est parallèle à elle-même, droite du plan.

$d$est donc parallèle distincte à α.

Vu l'axiome 5, il existe un plan β incluant d et sécant à α.

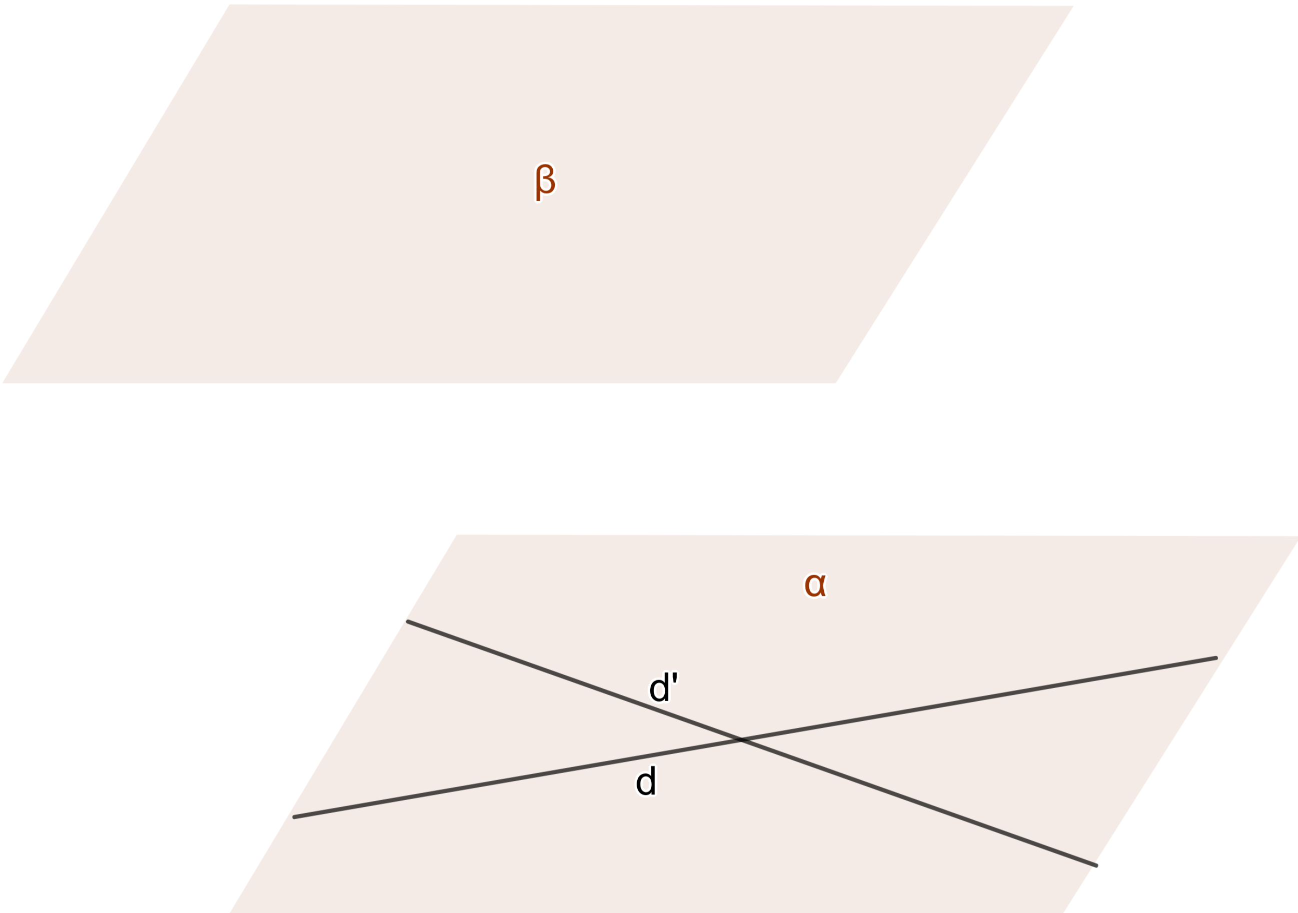


L'intersection de ces deux plans est la droite d'.

En effet, $d' \subset \alpha$ et d et d' sont coplanaires (dans β)
d et d' n'ont pas de point commun.

- Si un plan inclut une droite parallèle à un autre plan, l'intersection des deux plans est parallèle à cette droite (ou ils sont parallèles).

- **Deux plans sont parallèles ssi l'un d'eux est parallèle à deux droites sécantes de l'autre.**



Théorème direct

Si un plan est parallèle à deux droites sécantes d'un autre plan, alors les deux plans sont parallèles.

Hypothèse

$$\begin{cases} \beta // d \\ \beta // d' \\ d \subset \alpha \\ d' \subset \alpha \\ d \, et \, d' \, sécantes \end{cases}$$

Thèse

$\alpha // \beta$

pour la démonstration, nous allons supposer que d n'est pas incluse dans β (et que d' n'est pas incluse dans β).

Démonstration

Imaginons que α coupe β.

α coupe donc β suivant une hypothétique droite f.

La droite f est parallèle à d car si un plan inclut une droite parallèle à un autre plan, l'intersection des deux plans est parallèle à cette droite (ou ils sont parallèles).

Mais on peut dire la même chose pour d' !

La droite f est parallèle à d' car si un plan inclut une droite parallèle à un autre plan, l'intersection des deux plans est parallèle à cette droite (ou ils sont parallèles)..

Ainsi, d et d' sont deux droites sécantes parallèles à f , ce qui contredit l'axiome d'Euclide.

Les plans α et β sont donc bien parallèles.

6.6 Ombre

A retenir

Chaque sommet de l'objet donne un sommet de l'ombre, à condition que le rayon de soleil puisse atteindre le plan de portée.

Avec un plan de portée horizontal,

chaque sommet de l'ombre est le troisième sommet d'un triangle dont un côté est vertical,

le deuxième côté est horizontal, dans la direction donnée par la position horizontale du soleil,

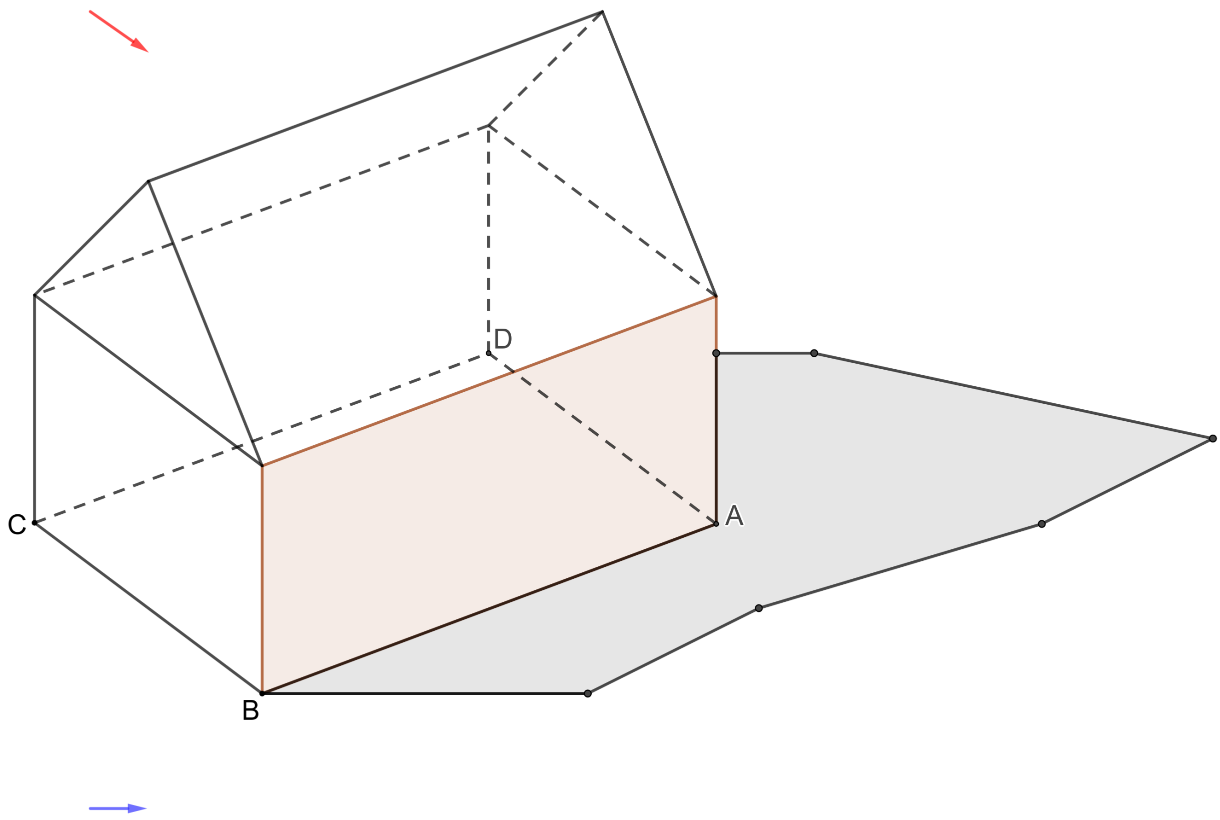
le troisième côté est le rayon de soleil, en tenant compte de l'élévation de celui-ci.

La construction se compose donc d'une famille de triangles à côtés parallèles.

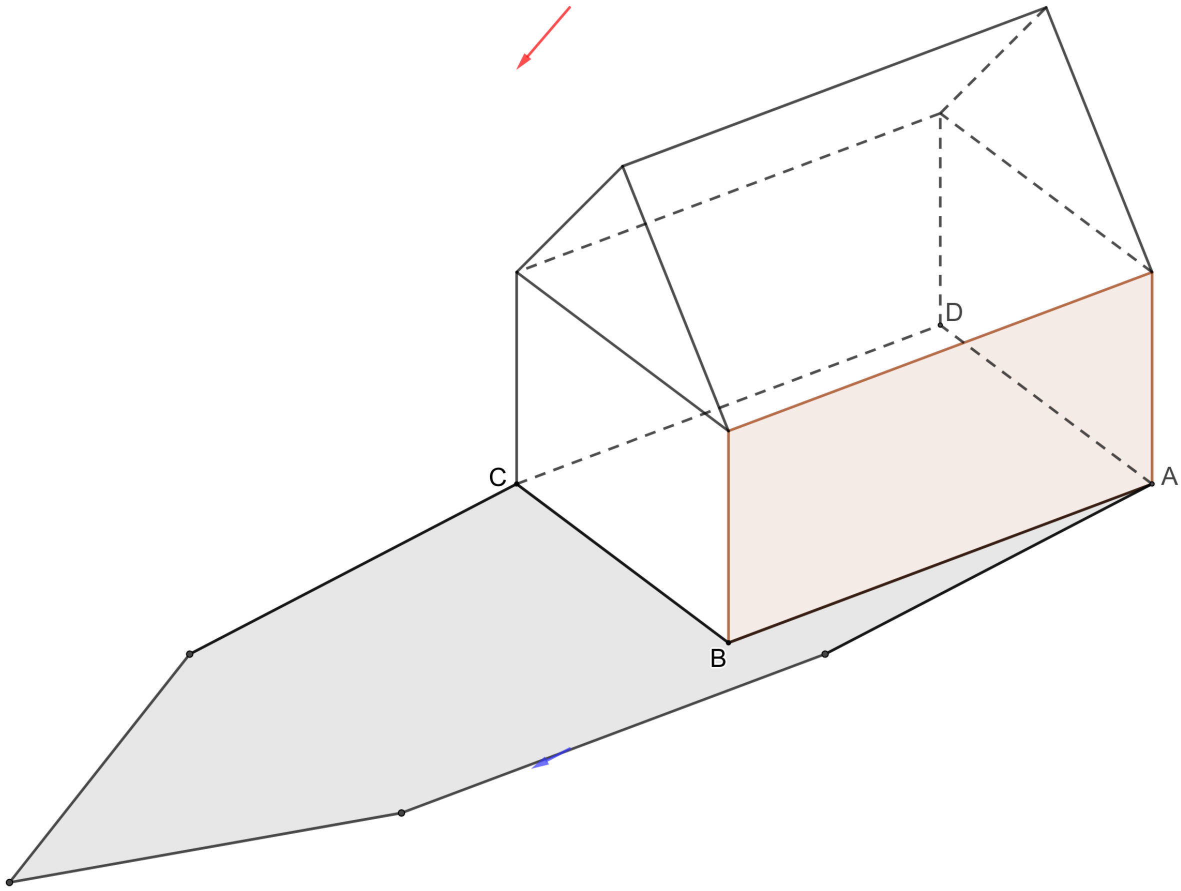
Réponse aux exercices

Les détails se trouvent à l'adresse
http ://tetramath.jean-luc-goffin.com/espace
sous l'onglet « Ombres ».

1.



2.



partie III

Annexes

Chapitre 1

Utilisation du cahier à spirale

Le cahier à spirale est un outil fantastique.

Il permet de conserver, pendant toute l'année, tout l'apprentissage en mathématiques (ou dans d'autres disciplines).

Son utilisation est fort simple.

Conservez les premières pages pour une table des matières.

Numérotez toutes les pages. Ceci peut être fait au fur et à mesure.

Prenez note en classe sur les pages de droite (de gauche pour les gauchers).

Faites tout le travail à domicile sur les pages de gauche : préparations, synthèses, aide fournie par un condisciple ou un professeur, travaux supplémentaires, ...

L'utilisation puis la création personnelle de schémas heuristiques (arbres) sur ces pages est un atout de réussite !

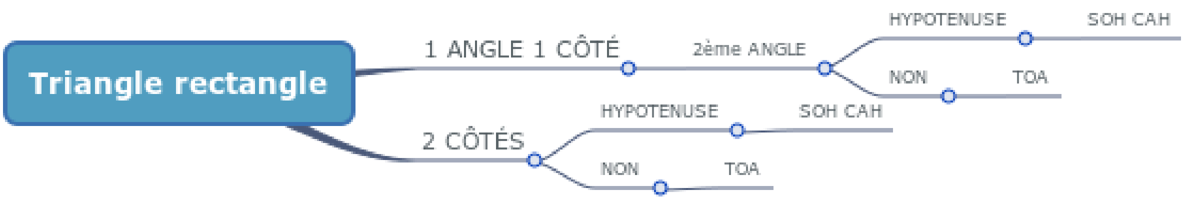
Chapitre 2

Exemples de synthèses

Les synthèses sont données sous forme d'arbres (schémas heuristiques).
Pourquoi ?
Parce que notre cerveau est organisé en réseau.

Exemple en trigonométrie

Résolution d'un triangle rectangle



Quelques remarques

Une synthèse ne contient pas tout. J'ai choisi de ne pas y mettre certaines informations.

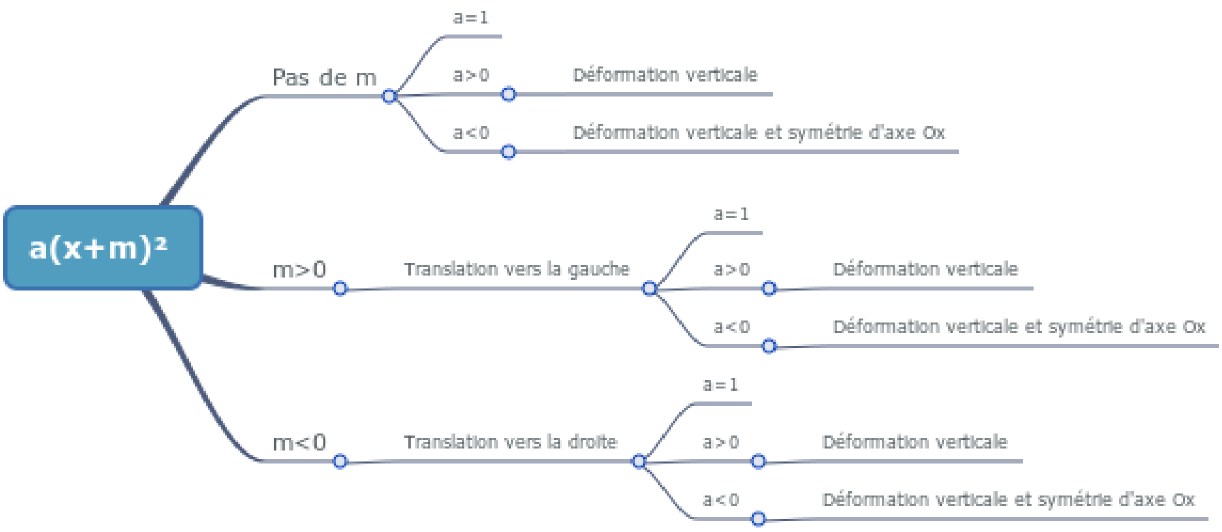
Le plus important est que cette synthèse soit utile. La meilleure synthèse est celle que tu fais toi-même.

Pour réaliser une telle synthèse, il y a très peu de règles à respecter.

- Choisis le sujet (théorie ou exercice) qui t'intéresse.
- Commence par le plus important.
- Couvre tous les cas.

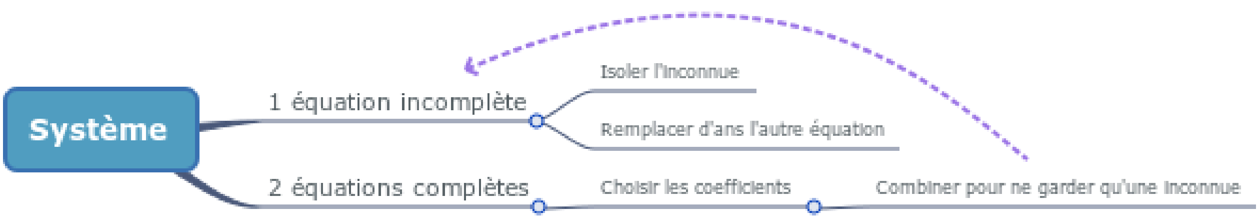
Exemple en fonctions de référence

Il s'agit de trouver les transformations qui permettent d'obtenir $a.(x+m)^2$ au départ de x^2.



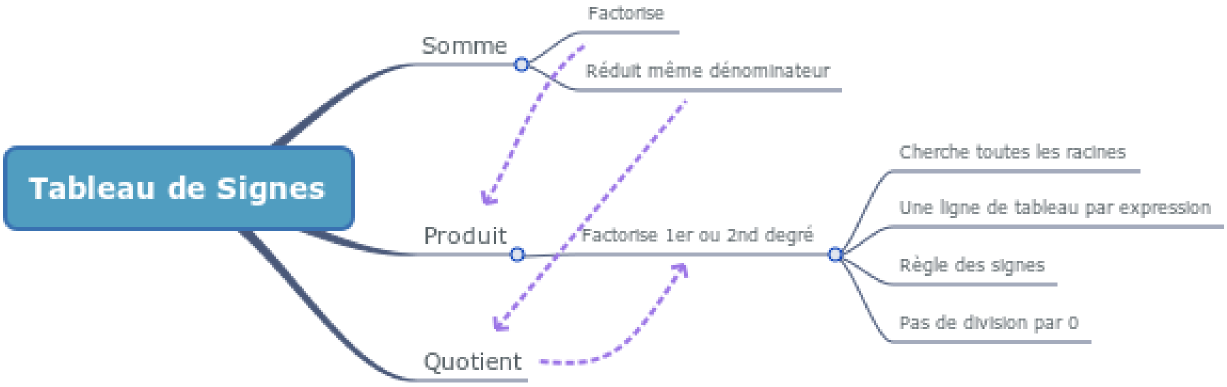
Exemple de la résolution de systèmes

Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues. La méthode des combinaisons est privilégiée.



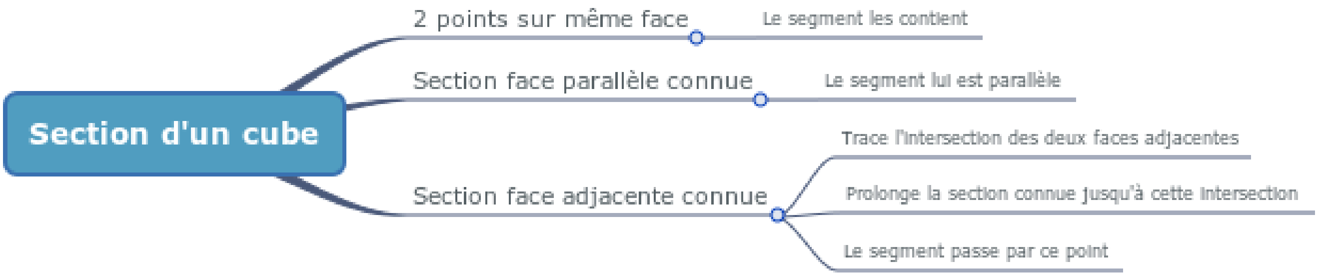
C'est un bel exemple de 3D. Après l'étape « Combiner pour ne garder qu'une inconnue » on continue sur une branche déjà connue.

Exemple du tableau de signes



Il y a des questions à se poser avant de tracer le tableau !

Exemple de la section plane d'un cube



Transmettre fraternellement ce que j'ai demandé avec foi et obtenu avec gratitude.